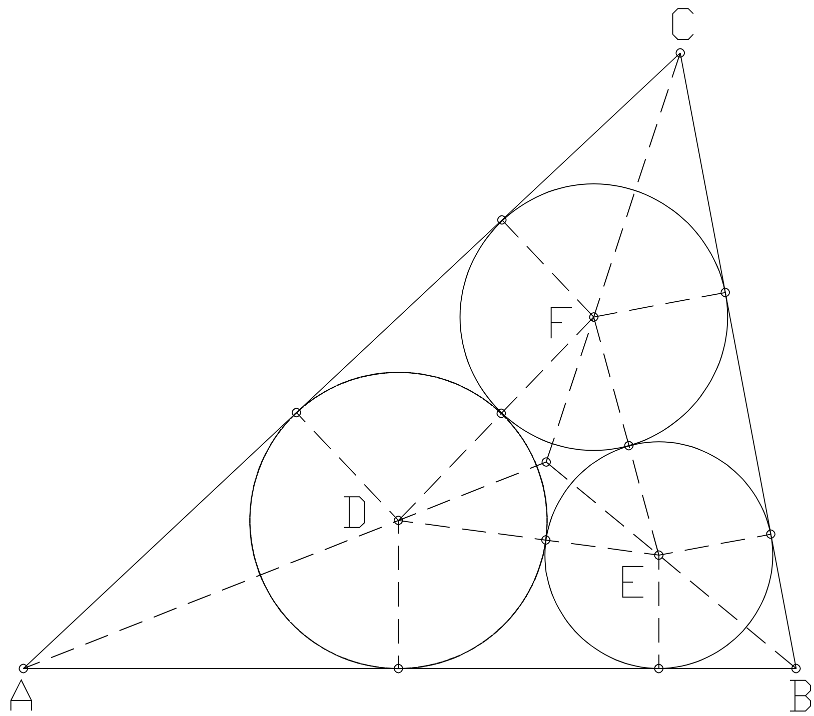
Das **Malfatti**-Problem

oder: ... die Suche nach 9 Berührpunkten

Gian Francesco Malfatti [1], stellte im Jahre 1803 die Aufgabe, einem Dreieck drei Kreise einzubeschreiben, welche die Dreiecksseiten und sich untereinander (paarweise) berühren.

Wir wollen versuchen, die Konstruktion schrittweise durchzuführen. Dabei wird es auf besondere Genauigkeit und auf einen sparsamen Umgang mit Hilfslinien ankommen. Außerdem sollte unsere Konstruktion nicht zu klein geraten, weil es sonst leicht unübersichtlich wird.

Damit die Kreise die Dreiecksseiten berühren, müssen ihre Mittelpunkte sicher auf den Winkelhalbierenden liegen.

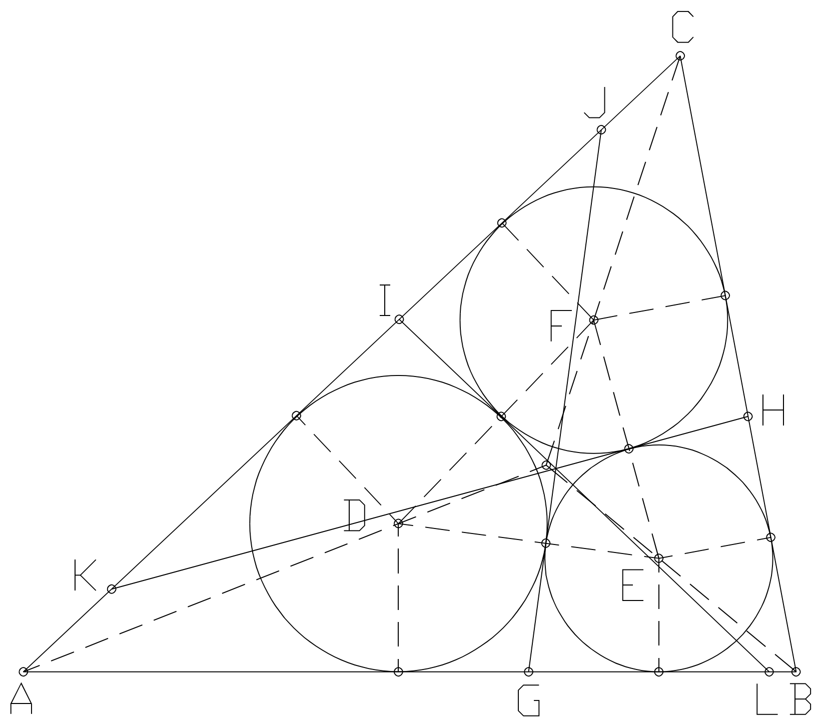


1. Zeichne auf einem besonderen Blatt (Querformat) ein möglichst großes Dreieck (Sonderfälle bitte vermeiden) und konstruiere die drei Winkelhalbierenden.

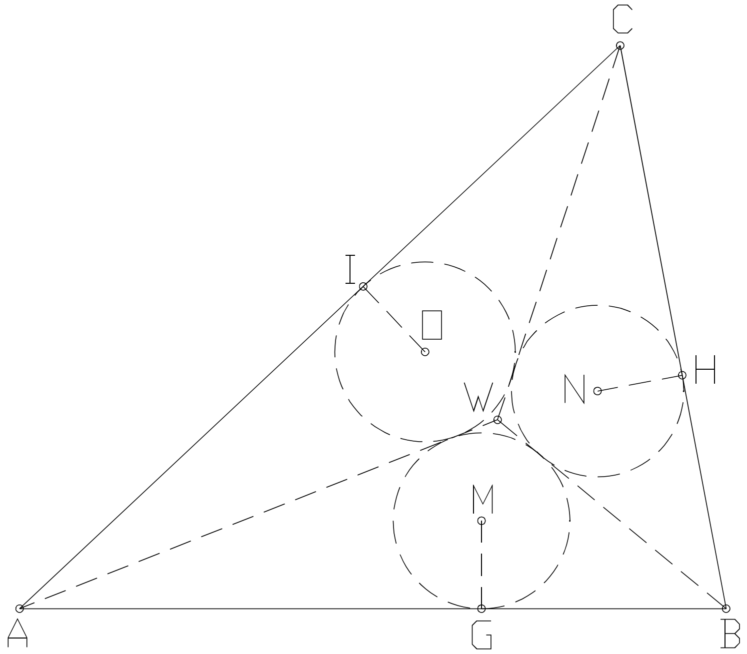
Wegen der Eigenschaft des paarweisen Berührens der Kreise müsste man für je zwei Kreise eine gemeinsame Tangente, bzw einen zugehörigen Streckenteil finden. Könnte man diese konstruieren (z.B. GJ und HK), so erhielte man Mittelpunkte von den gesuchten Berührkreisen durch Konstruktion weiterer Winkelhalbierender in Teilfiguren (z.B. Halbierung der Winkel: ∢JGA, ∢BGJ, ∢CHK).

2. Beschreibe mündlich die Konstruktion, wie man von einem Punkt außerhalb eine Tangente an einen Kreis legt.

   Führe diese Teilkonstruktion beispielhaft gesondert im Heft durch.



[1] ✳ 1731 in Ala (Trentino / Italien), ✝ 09.10.1807 in Ferrara (Italien)
Quelle: http://www.lutzgehlen.de/kopro/malfatti/malfatti.html

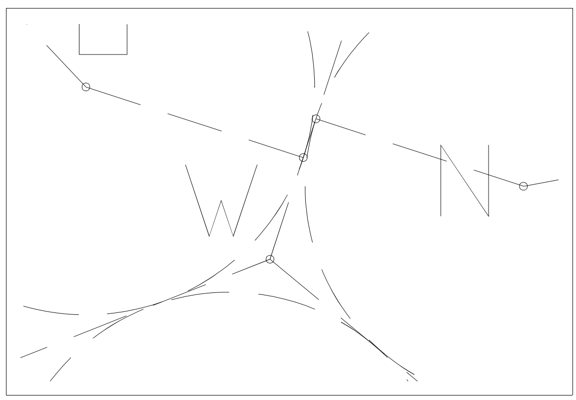


Erstaunlicherweise erhält man die Tangentenpunkte G, H und I als Berührpunkte von drei Hilfskreisen mit den Dreiecksseiten.

Diese Hilfskreise sind die Innenkreise der drei Teildreiecke ΔABW, ΔBCW, ΔCAW, die durch Einzeichnen der Winkelhalbierenden entstanden sind.

3. Konstruiere die Mittelpunkte M, N und O der Innenkreise in den Dreiecken ΔABW, ΔBCW und ΔCAW, sowie die Berührpunkte G, H und I dieser Kreise mit den Dreiecksseiten. Beachte, dass die Kreise die jeweilige Winkelhalbierende i.a. in verschiedenen Punkten berühren.

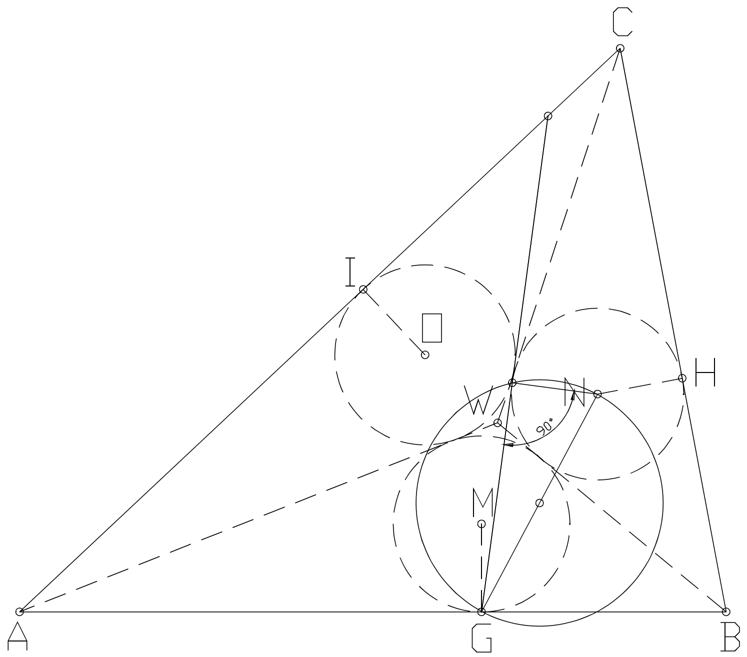
   Ein vergrößerter Ausschnitt. Man muss schon sehr genau zeichnen können, um diese Unterschiede konstruktiv bestätigen zu können.

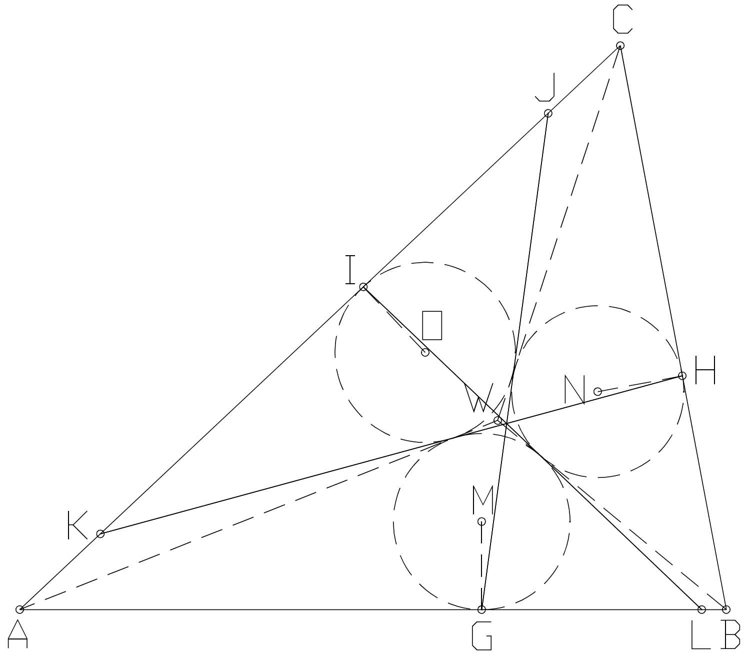


4. Die gesuchten Tangentenstücke erhält man nun, indem man von G, H und I Tangenten an die Hilfskreise legt.

   Dargestellt ist ein Konstruktionsbeispiel für eine Tangente vom Punkt G an den Hilfskreis mit Mittelpunkt N.

   Versuche, mit möglichst wenigen Hilfslinien auszukommen.



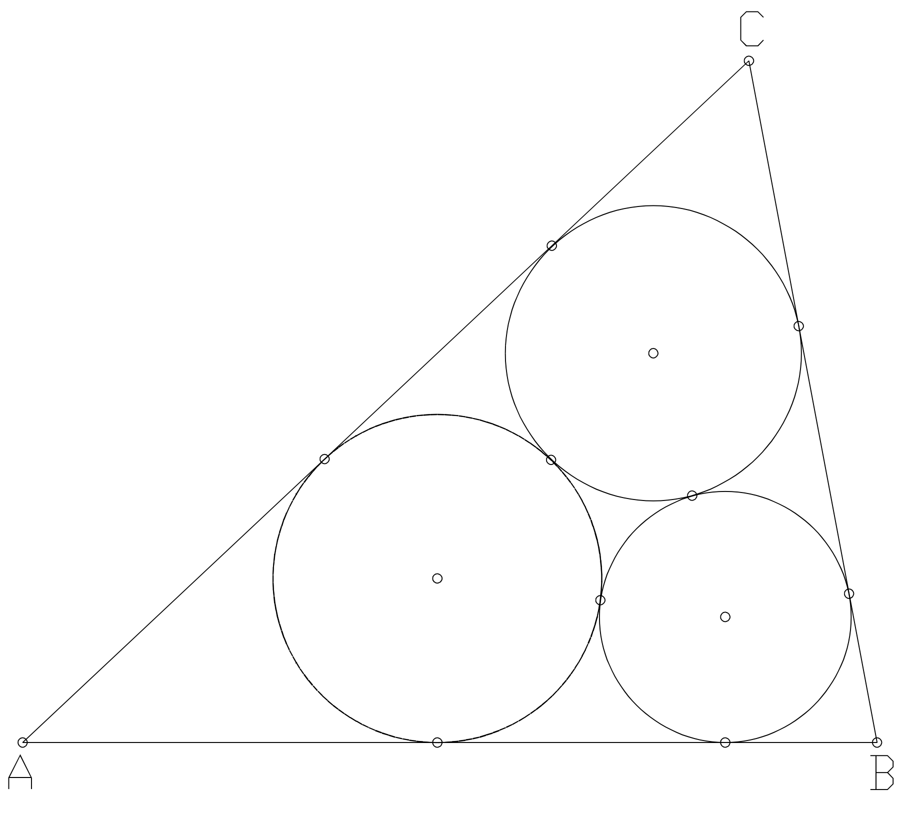


Ich nehme an, dass deine Skizze nun doch schon etwas unübersichtlich geworden ist.

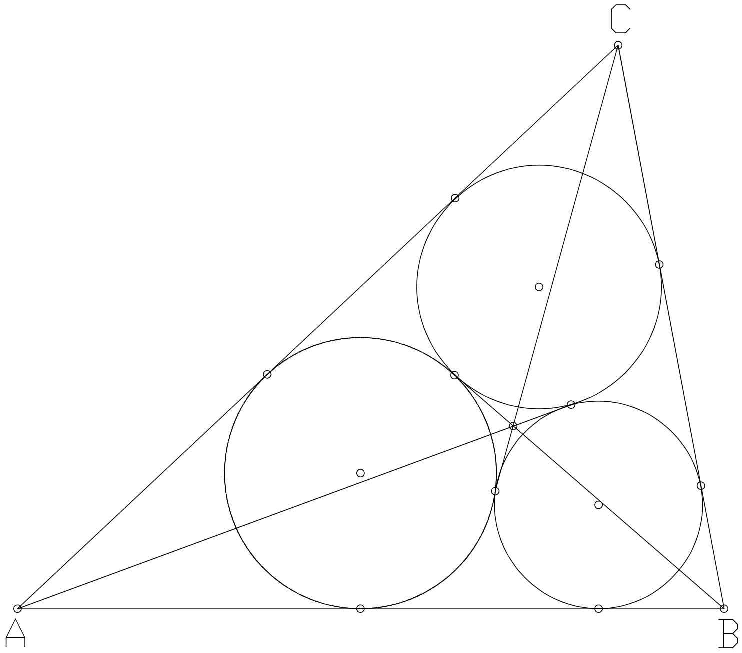
5. Fertige eine Kopie der wesentlichen Punkte an, indem du ein neues Blatt unter dem alten befestigst und mit einer Nadel die Punkte auf das neue Blatt überträgst.
   Kennzeichne und benenne alle kopierten Punkte und zeichne das Dreieck.

6. Konstruiere nun in der Kopie die drei gesuchten Malfatti-Kreise. Versuche wiederum mit möglichst wenigen Hilfslinien auszukommen.[2]

   Bist du mit dem Ergebnis deiner Bemühungen zufrieden? - Berühren sich deine Kreise gut und berühren sie auch die Dreiecksseiten?



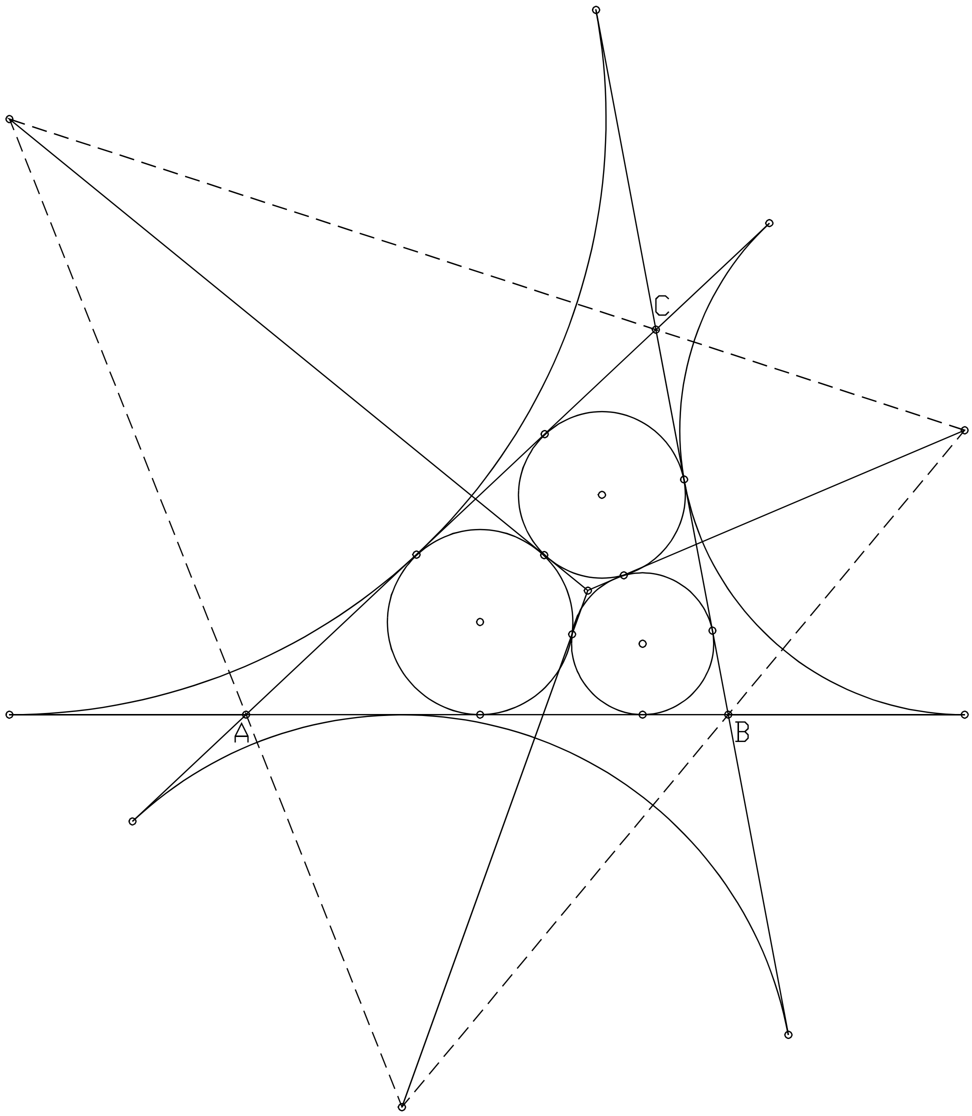
[2] Der Beweis, dass die Gesamtkonstruktion richtig ist, ist nicht ganz einfach zu führen.



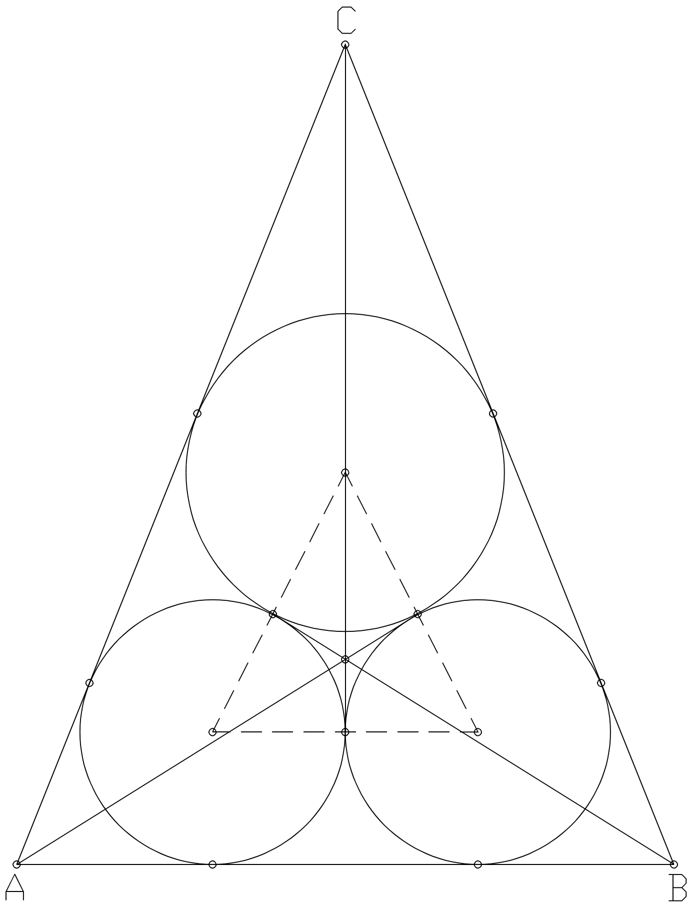
Nachtrag für Interessierte:

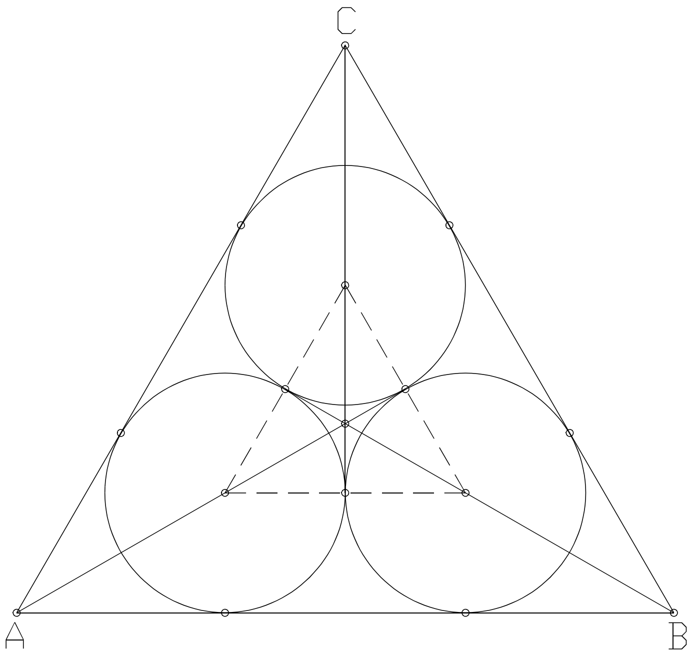
Verbindet man die paarweisen Berührpunkte der Malfatti-Kreise mit jeweils einem Eckpunkt des Dreiecks (siehe Skizze), so verlaufen diese drei Strecken durch einen Punkt. Dieser Punkt heißt 1. Ajima-Malfatti-Punkt.

Den 2. Ajima-Malfatti-Punkt erhält man, wenn man Geraden durch die Mittelpunkte der Ankreise des Dreiecks und die paarweisen Berührpunkte der Malfatti-Kreise zeichnet.



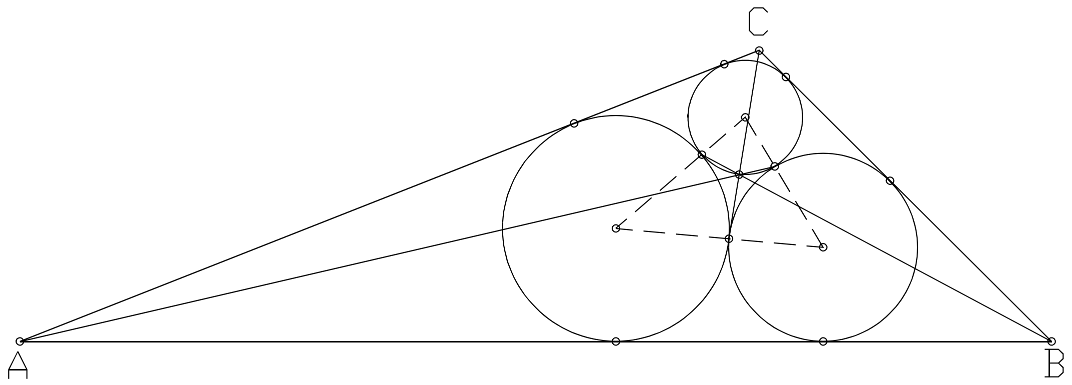
Zwei Spezialfälle:





Das **Malfatti**-Problem
oder: ... die Suche nach 9 Berührpunkten

Ein stumpfwinkliger Fall:



Historische Anmerkung:

Die angegebene konstruktive Lösung des Malfattischen Problems geht zurück auf den Schweizer Mathematiker Jakob Steiner.

Jakob Steiner wurde am 18. März 1796 in Utzenstorf (Schweiz) geboren und starb am 01. April 1863 in Bern (Schweiz).

Jakob Steiner wirkte seit 1834 als ordentlicher Professor in Berlin.