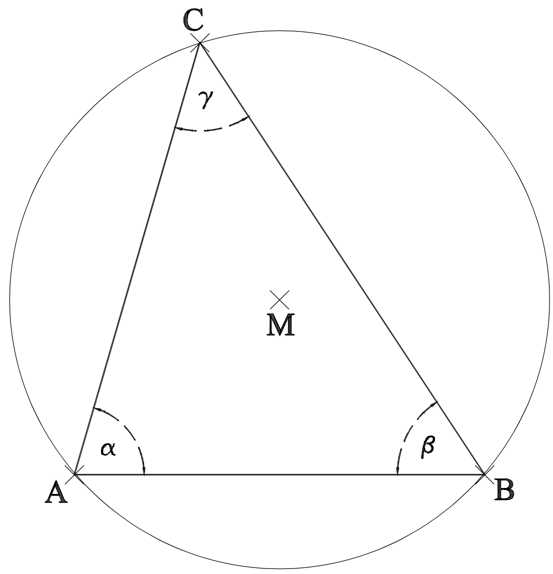
Kreis und Winkel

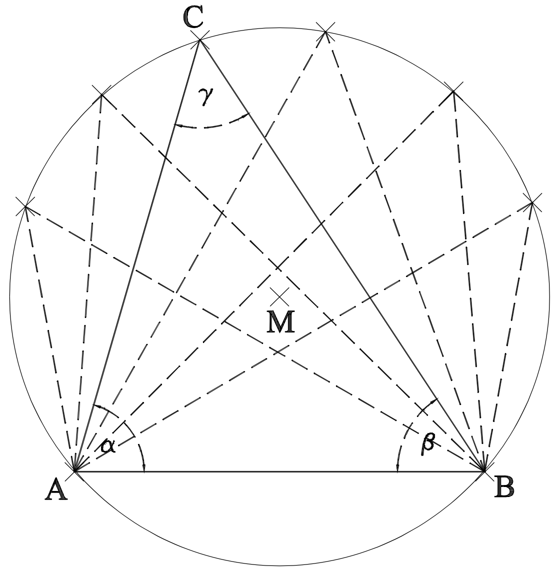
Wir bewegen uns auf der Peripherie (dem Kreisumfang)



Stelle dir vor, dass du zu einer Zirkusvorstellung gehst und dass du von dem Eingangstor in die Zirkusarena, stehend auf der kreisförmigen Begrenzung, ein Erinnerungsphoto vom Eingangstor machen möchtest.

Leider bekommst du das ganze Eingangstor nicht ganz in dein Bild im Sucher, und da du, wegen der Stuhlreihen nicht weiter zurücktreten kannst schlägt jemand vor, doch etwas mehr aus der Schräge zu photographieren, dann würde der Öffnungswinkel größer.

Das wollen wir untersuchen!



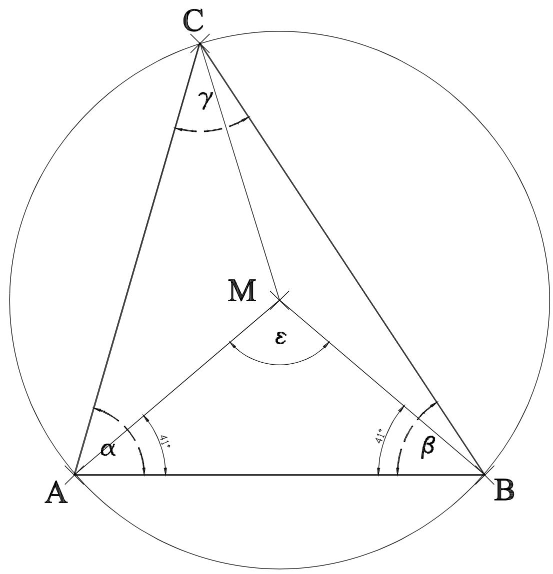
1) Zeichne in dein Heft einen (nicht zu kleinen) Kreis und konstruiere eine Sehne AB, die in unserem geometrischen Modell unser Eingangstor darstellen soll.

   Wähle nun einen Punkt C auf der Peripherie und miss die Größe des Öffnungswinkels γ.

   Wähle nun mindestens 3 weitere mögliche Punkte für C und miss jeweils die Größe des entstehenden Öffnungswinkels.

   An welcher Stelle wäre ein Photo am günstigsten zu “schießen”? - Was meinen deine Nachbarn; wie würden sie vorgehen?

Was denn - es ist egal wo C auf dem Umfang liegt? - Das Maß des Öffnungswinkels γ ist immer gleich? - Erstaunlich; das kann nur daran liegen, dass A, B und C Kreispunkte sind, d.h. alle 3 sind gleichweit vom Mittelpunkt M des Kreises entfernt.



2) Zeichne in deine Figur die 3 Radien: AM, BM und CM ein und bezeichne den Winkel ∢AMB mit ε. Wie groß ist eigentlich ε? (Egal, wo der Punkt C auf der Peripherie liegt: Das Dreieck ΔABM ändert sich nicht.)

   <u>Begründe:</u> Im Dreieck ΔABM gilt: $\overline{\alpha_1} = \overline{\beta_2}$.

   Kennzeichne noch weitere Teilwinkel der Figur mit jeweils gleichen Farben und bezeichne sie geeignet.

Kreis und Winkel

Wir bewegen uns auf der Peripherie (dem Kreisumfang)

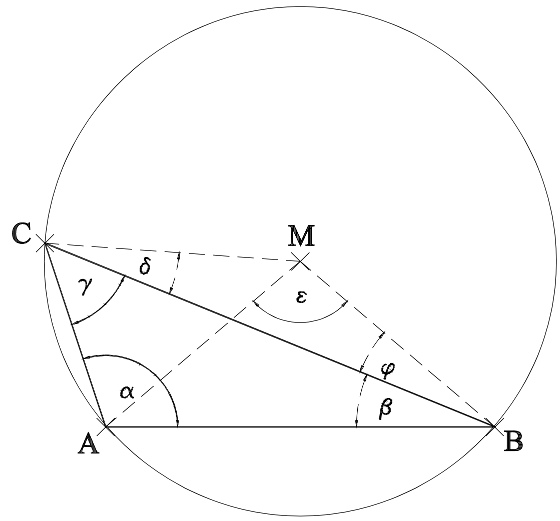
3) <u>Beweise:</u> $\overline{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\varepsilon}$

Und da der Mittelpunktswinkel ε über der Sehne AB fest ist, ist es auch egal wo C liegt!

<u>Tipp:</u> Verwende einmal den Winkelsummensatz im Dreieck ΔABM und ein weiteres Mal im Dreieck ΔABC; benutze im 2. Fall die Gleichheit von Teilwinkeln der Figur.

4) Formuliere deine Version des Umfangswinkelsatzes am Kreis. - Formuliere auch den zugehörigen Kehrsatz in der Form: “Wenn ... , dann ... “. - Begründe, dass auch der Kehrsatz richtig ist.

Ist denn eigentlich unser Beweis des Umfangswinkelsatzes schon vollständig? - Müssen wir nicht noch den Fall betrachten, dass der Mittelpunkt des Kreises außerhalb des Dreiecks ΔABC liegt?!



5) Fertige in deinem Heft eine Konstruktionsskizze, etwa so wie nebenstehend an und kennzeichne die Winkel entsprechend. - Wir müssen wiederum beweisen, dass gilt:

$$\overline{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\varepsilon}$$

Begründe die folgenden Beweisschritte:

a) $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = 180°$

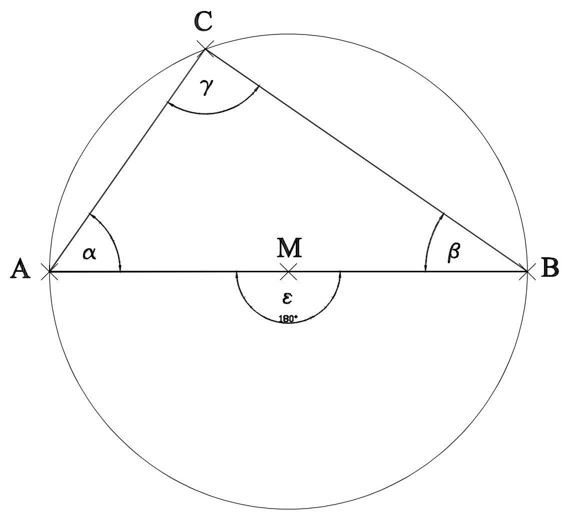
b) $\overline{\alpha_1} + \overline{\beta} + \overline{\varphi} + \overline{\varepsilon} = 180°$

c) $\overline{\alpha} + \overline{\gamma} = \overline{\alpha_1} + \overline{\varphi} + \overline{\varepsilon}$

d) $\overline{\alpha_2} + \overline{\gamma} = \overline{\varphi} + \overline{\varepsilon}$

e) $\overline{\gamma} + \overline{\delta} + \overline{\gamma} = \overline{\varphi} + \overline{\varepsilon}$

f) $2 \cdot \overline{\gamma} = \overline{\varepsilon}$



6) Formuliere die Aussage des Umfangswinkelsatzes, wenn die Sehne AB durch den Mittelpunkt verläuft, d.h. AB ein Durchmesser des Kreises ist.

Dieser berühmte Spezialfall des Umfangswinkelsatzes ist bekannt unter dem Namen: **Satz des Thales**. Versuche durch Literaturrecherche im Lexikon, Internet etc. etwas mehr über den griechischen Mathematiker: ‘Thales von Milet’ zu erfahren.

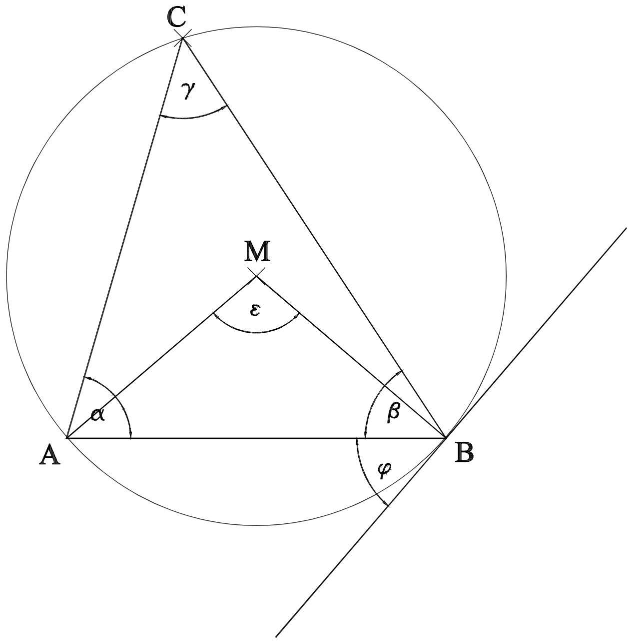
7) Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$; $\overline{AC} = 3\,\text{cm}$ - nur mit Zirkel und Lineal!

8) Zeichne einen Kreis und wähle einen Punkt P außerhalb des Kreises. - Konstruiere nun die Berührpunkte der 2 Tangenten durch P an den Kreis. (Beachte: Eine Tangente - und der Radius vom Mittelpunkt zum Berührpunkt - sind zueinander senkrecht.)

Kreis und Winkel

Wir bewegen uns auf der Peripherie (dem Kreisumfang)

Nun noch eine hübsche Folgerung.[1]



9) Zeichne im Punkt B deiner Sehne eine Tangente an den Kreis (du darfst das Geodreieck benutzen) und kennzeichne den Winkel zwischen Sehne und Tangente wie nebenstehend.

In der Literatur wird dieser Winkel φ auch **Sehnen-Tangenten-Winkel** genannt.

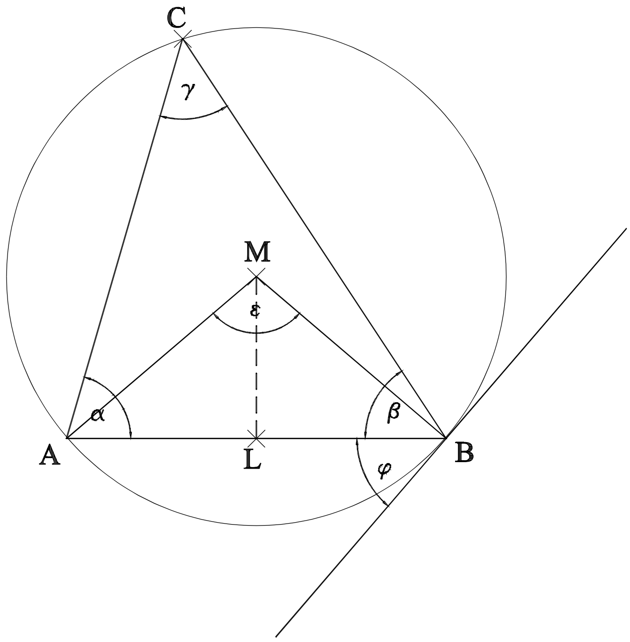
Beweise: $\overline{\gamma} = \overline{\varphi}$

D.h.: An einem Kreis ist der Sehnen-Tangenten-Winkel genau so groß wie der Umfangswinkel.

Ein kleiner Tipp:

Fälle vom Punkt M das Lot auf die Sehne AB und nenne den Fußpunkt L. Zeige, dass auch für φ gilt:

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\varepsilon}$$



....

Zum Schluß:

Wenn man nun auch noch im Sehnenpunkt A eine Tangente zeichnet, so schneiden sich die beiden Tangenten sicher in einem Punkt.

Kannst du sagen, wie groß der Winkel sein muss, unter dem die beiden Tangenten sich schneiden?

Kann man diese Frage nach den vorherigen Untersuchungen beantworten? - Du sicher !!!

[1] Wer es bisher verstanden hat (und das sind doch sicher alle), der hat auch weiter keine Probleme!