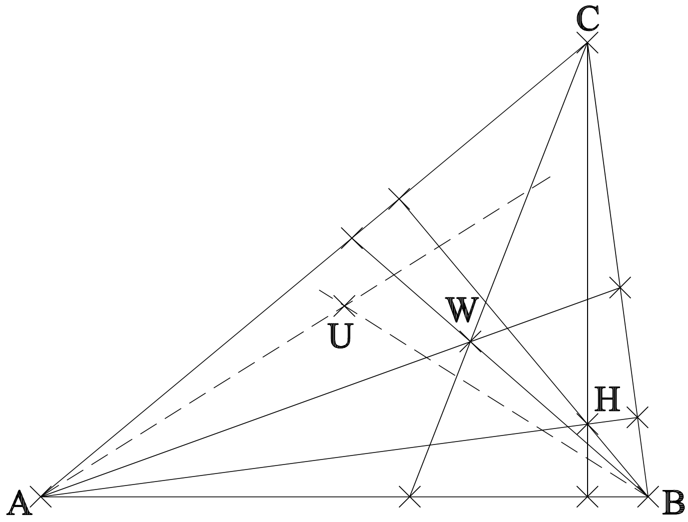
Linien im Dreieck und Spiegelung

Wie verlaufen die Spiegellinien eines Dreiecks?



Zeichne in dein Heft ein beliebiges, spitzwinkliges Dreieck.
Aber bitte nicht zu klein und nicht den Spezialfall eines gleichschenkligen Dreieckes.

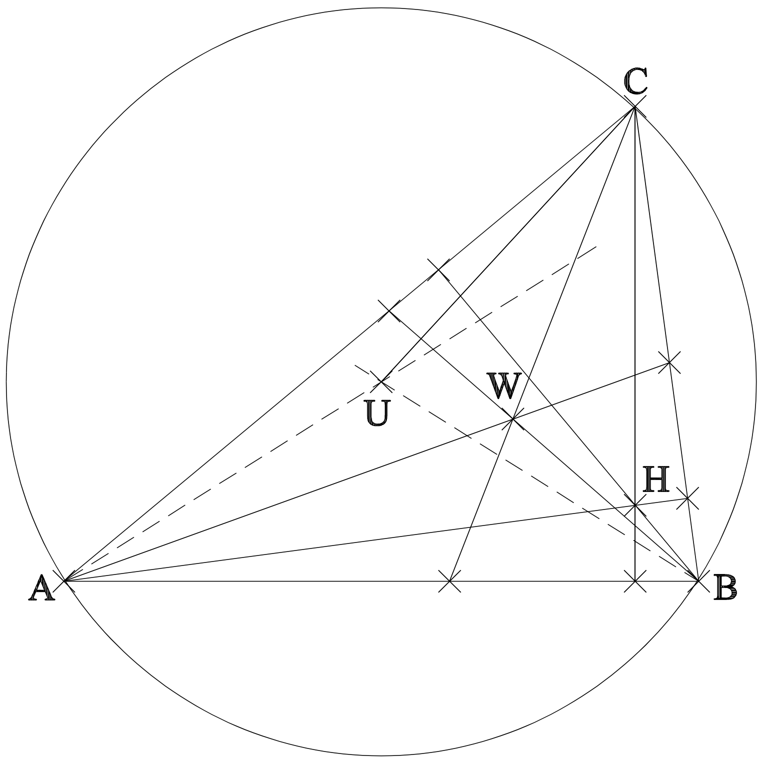
Konstruiere nun die drei Winkelhalbierenden und die drei Höhen mit ihren jeweiligen gemeinsamen Schnittpunkten **W** und **H**.

Spiegele nun die Höhe $\mathbf{h_a}$ an $\mathbf{w_\alpha}$ und die Höhe $\mathbf{h_b}$ an $\mathbf{w_\beta}$. Diese beiden Spiegelhöhen $\mathbf{h_a}$**’** und $\mathbf{h_b}$**’** schneiden sich in einem Punkt **U**.

Wenn man nun die dritte Höhe $\mathbf{h_c}$ an $\mathbf{w_\gamma}$ spiegelt, verläuft dann die Spiegelhöhe $\mathbf{h_c}$**’** auch durch den Punkt **U** ?

Untersuche dies und vergleiche mit den Untersuchungen der Nachbarn. Wer kann konstruktiv bestätigen, dass die Spiegelhöhen auch durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen? - Tipp: Sei sparsam mit Hilfslinien und Bezeichnungsweisen, sonst wird es leicht unübersichtlich. Verwende zu Konstruktionen das Geodreieck.

Wir wollen uns nun mutig an den Beweis wagen. Wir hatten früher schon mehrfach mit dem Umfangswinkelsatz, - bzw. seinem Spezialfall, dem Satz des Thales - zu tun. Vielleicht ist uns dieser Satz hier auch von Nutzen?



Ergänze deine Figur mit dem Außenkreis des Dreiecks und zeichne noch die Strecke **UC** ein. Begründe zuvor, dass **U** der Mittelpunkt des Außenkreises ist.
[Tipp: Arbeitsblatt „Linien im Dreieck”]

Wir müssen nun beweisen, dass gilt:

$$\overline{\sphericalangle \mathbf{UCW}} = \overline{\sphericalangle \mathbf{WCH}}$$

denn dann läge die Strecke **UC** auf der Spiegelhöhe $\mathbf{h_c}$**’**.

Begründe die folgenden Beweisschritte:

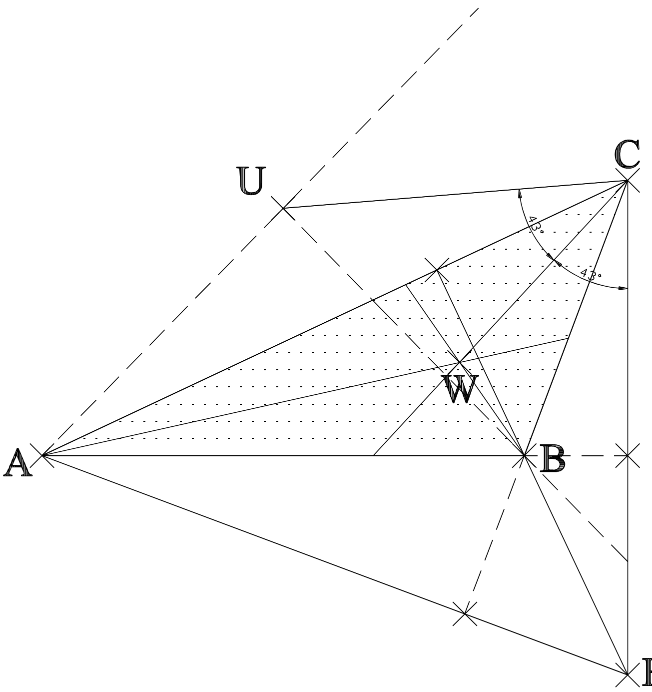
1) $\overline{\sphericalangle \mathbf{CUA}} = 2 \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}$
2) $\overline{\sphericalangle \mathbf{ACU}} = 90° - \overline{\boldsymbol{\beta}}$
3) $\overline{\sphericalangle \mathbf{HCB}} = 90° - \overline{\boldsymbol{\beta}}$
4) $\overline{\sphericalangle \mathbf{ACW}} = \overline{\sphericalangle \mathbf{WCB}}$
5) ..... qed.

<ins>Hausaufgabe:</ins>

Untersuche konstruktiv, ob die Spiegelhöhen auch im Fall eines stumpfwinkligen Dreiecks durch einen gemeinsamen Punkt **U** verlaufen. Achte auf eine vernünftige Größe der Gesamtfigur und eine sinnvolle Wahl des Winkelmaßes des stumpfen Winkels.

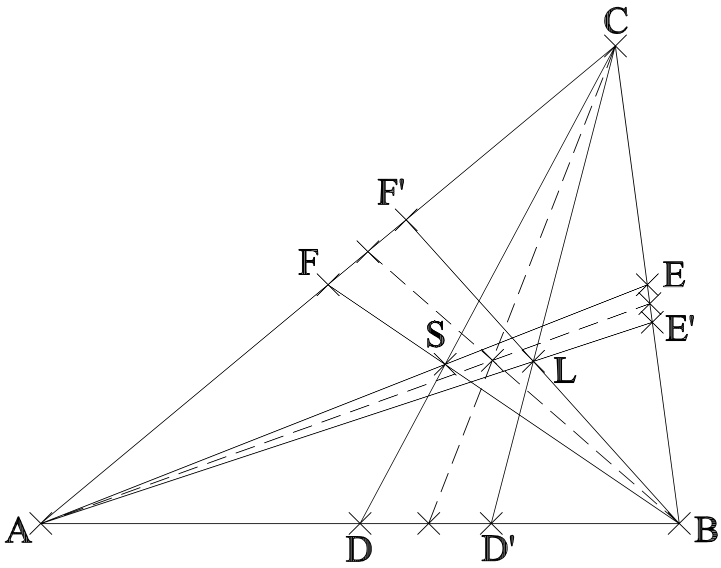
Für besonders Mutige:

Versuche auch in diesem Fall einen Beweis zu führen, was nicht ganz einfach ist.



Wir wollen nun statt der Höhen die Seitenhalbierenden spiegeln.

Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck ΔABC (Sonderfälle bitte vermeiden) und konstruiere die drei Seitenhalbierenden und die drei Winkelhalbierenden.
Spiegele nun jede Seitenhalbierende an der zugehörigen Winkelhalbierenden mit dem gemeinsamen Dreieckspunkt und überprüfe, ob die drei **Symmedianen**, wie diese Spiegelstrecken genannt werden, wieder durch einen Punkt verlaufen.
Wenn dem so ist, so benenne diesen Schnittpunkt der Symmedianen mit **L** (Lemoine-Punkt).[1]



Dieser Dreieckspunkt **L** hat viele besondere Eigenschaften. Im Moment müssen wir uns jedoch mit dieser konstruktiven Erfahrung der Existenz begnügen. Zum Beweis, dass alle drei Symmedianen durch einen Punkt **L** verlaufen, benötigen wir geometrische Sätze der Klassenstufe 9.

---

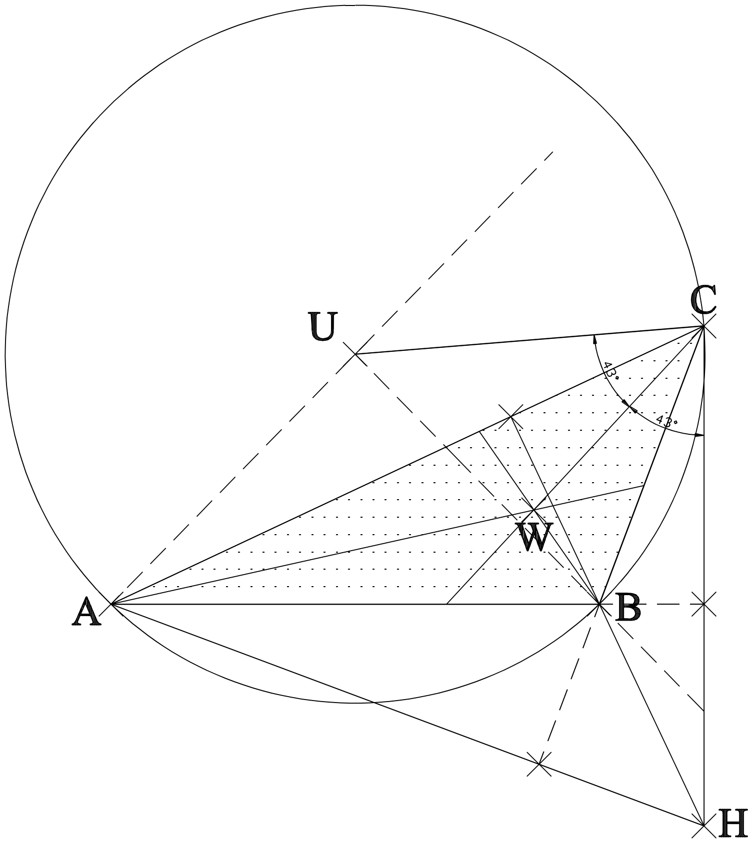
[1] Émile Michel Hyacinthe **Lemoine** (✳ 22. November 1840 in Quimper; ✝ 21. Februar 1912 in Paris)

Linien im Dreieck und Spiegelung

Wie verlaufen die Spiegellinien eines Dreiecks?

<u>Nachtrag:</u>

(Beweis des stumpfwinkligen Falles)



1) Spiegelt man eine Höhe an der zugehörigen Winkelhalbierenden (mit gleichem Eckpunkt), so verläuft die Spiegelhöhe (als Gerade aufgefasst) stets durch den Mittelpunkt des Umkreises. Der Schnittpunkt zweier Spiegelhöhen muss demnach der Mittelpunkt des Umkreises sein.

2) $\overline{\sphericalangle\,\mathbf{CUA}} = 2\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}$

[Umfangswinkelsatz]

3) $\overline{\sphericalangle\,\mathbf{AUC}} = 360° - 2\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}$

4) $\overline{\sphericalangle\,\mathbf{UCA}} = \overline{\boldsymbol{\beta}} - 90°$

[Winkelsummensatz im gleichschenkligen Dreieck ΔACU]

5) $\overline{\sphericalangle\,\mathbf{BCH}} = \overline{\boldsymbol{\beta}} - 90°$

[Winkelsummensatz im rechtwinkligen Dreieck]

6) $\overline{\sphericalangle\,\mathbf{ACW}} = \overline{\sphericalangle\,\mathbf{WCB}}$

[Eigenschaft der Winkelhalbierenden]

7) $\overline{\sphericalangle\,\mathbf{UCW}} = \overline{\sphericalangle\,\mathbf{UCA}} + \overline{\sphericalangle\,\mathbf{ACW}} = \overline{\sphericalangle\,\mathbf{WCB}} + \overline{\sphericalangle\,\mathbf{BCH}} = \overline{\sphericalangle\,\mathbf{WCH}}$ [4) , 5) und 6)]