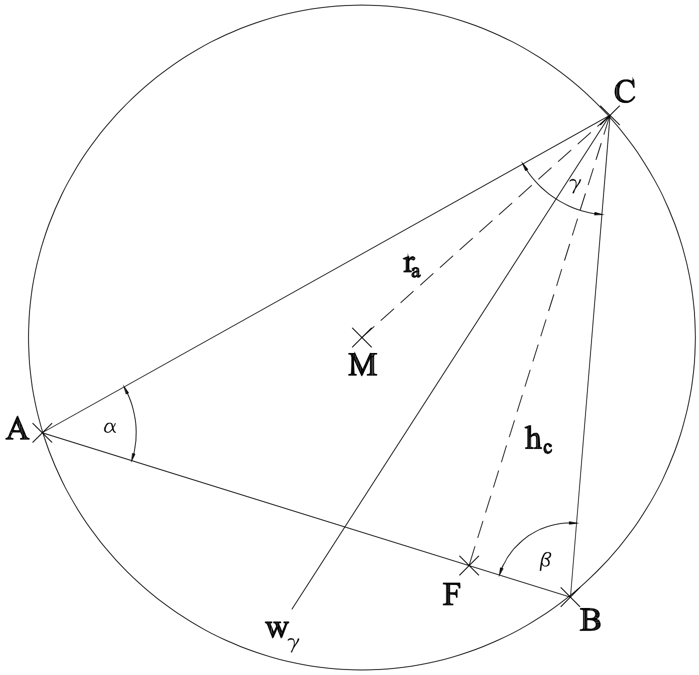
Linien im Dreieck

Wer hätte diesen Zusammenhang vermutet?

Zeichne in dein Heft ein beliebiges, spitzwinkliges Dreieck.
Aber bitte nicht zu klein und nicht den Spezialfall eines gleichschenkligen Dreieckes, sonst kannst du die tolle Beziehung nicht erkennen.



Konstruiere nun:

a) den Mittelpunkt **M** des Außenkreises und zeichne den Radius $\mathbf{r_a}$ = MC bezogen auf den Eckpunkt C ein,

b) die Winkelhalbierende $\mathbf{w_\gamma}$,

c) und die Höhe $\mathbf{h_c}$.

Damit hast du 3 der 4 wesentlichen Linien im Dreieck, bezogen auf den Eckpunkt C, konstruiert. - Was war noch einmal die vierte?

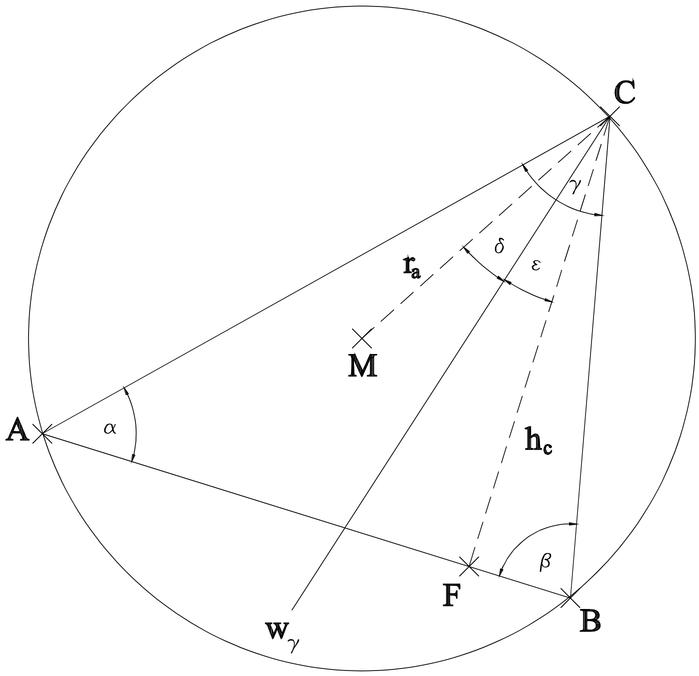
Gab es da nicht schon einmal eine Beziehung zwischen drei jeweiligen Schnittpunkten von Dreieckslinien? - Was war noch einmal die Eulersche Gerade? Egal, wir wollen uns nun mit unserer neuen Konstruktion beschäftigen.

---

1) Untersuche deine Konstruktion auf Besonderheiten (Streckenlängen, Winkelgrößen, ...) - Schon etwas entdeckt? - Vergleiche mit der Konstruktion deiner Nachbarn.

In der nebenstehenden Skizze sind zwei Winkel gekennzeichnet:

$$\delta := \sphericalangle(r_a, w_\gamma)$$
$$\varepsilon := \sphericalangle(w_\gamma, h_c)$$



Kennzeichne die Winkel in deiner Skizze entsprechend und bestimme die Winkelgrößen möglichst genau. - Vergleiche wiederum mit den Ergebnissen deiner Nachbarn.

Ich nehme an, auch deine Untersuchungen haben dich, genauso wie mich, zu der <u>Behauptung</u> geführt:

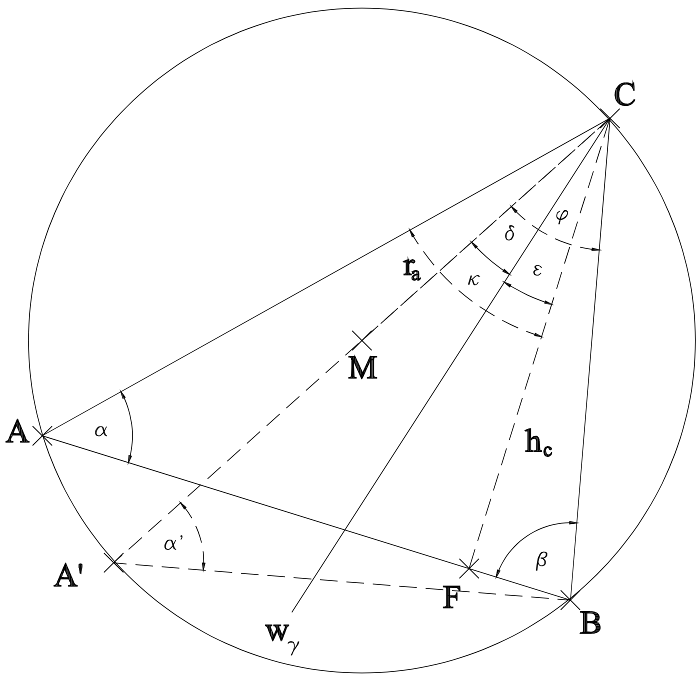
$$\overline{\delta} = \overline{\varepsilon} .$$

Verblüffend! - Kann man das auch beweisen? - Ist das wirklich immer so? - Was hieße das denn im Spezialfall, dass $M \in AB$? - Untersuche diesen Spezialfall als <u>Hausaufgabe</u>!

Linien im Dreieck

Wer hätte diesen Zusammenhang vermutet?

Wir wollen uns nun mutig an den Beweis wagen. Die Hausaufgabe hatte schon etwas mit dem Umfangswinkelsatz, - bzw. seinem Spezialfall, dem Satz des Thales - zu tun. Vielleicht ist uns dieser Satz hier auch von Nutzen?



Ergänze deine Figur (möglicherweise solltest du neu beginnen, wenn es schon etwas unübersichtlich geworden ist) durch ein neues (Hilfs-) Dreieck $\Delta A'BC$, wobei man sich vorstellen kann, dass der Punkt A des Ausgangsdreieckes ΔABC so weit auf der Peripherie des Kreises verschoben wird, bis A'C durch den Mittelpunkt verläuft.

Kennzeichne die Winkel in deiner Konstruktion wie folgt:

$$\kappa := \sphericalangle(AC, h_c)$$

$$\varphi := \sphericalangle(A'C, BC)$$

---

2) Begründe die folgenden Beweisschritte:

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha'}$$

$$\overline{\varphi} = 90° - \overline{\alpha}$$

$$\overline{\kappa} = 90° - \overline{\alpha}$$

$$\overline{\varphi} = \frac{\overline{\gamma}}{2} + \overline{\delta}$$

$$\overline{\kappa} = \frac{\overline{\gamma}}{2} + \overline{\varepsilon}$$

Durch Verbindung dieser Beweisgedanken ergibt sich die Behauptung!

Und nun kommt eine "hübsch häßliche" Konstruktionsaufgabe, die jedoch voraussetzt, dass eine Winkelhalbierende keine Halbgerade, sondern eine Strecke ist.

3) Gesucht ist ein Dreieck ΔABC mit folgenden Maßen:

$$\overline{\mathbf{h_c}} = 5 \text{ cm} ; \overline{\mathbf{w_\gamma}} = 6 \text{ cm} ; \overline{\mathbf{s_c}} = 9 \text{ cm}$$

Es liegt nahe, bei dieser Konstruktionsaufgabe den Winkel $\varepsilon := \sphericalangle(w_\gamma, h_c)$ zu verwenden; wenn man nun noch an den vorherigen Satz denkt; dann findet man sicherlich den Mittelpunkt des Außenkreises; .....

Wer das schafft - alle Achtung!!

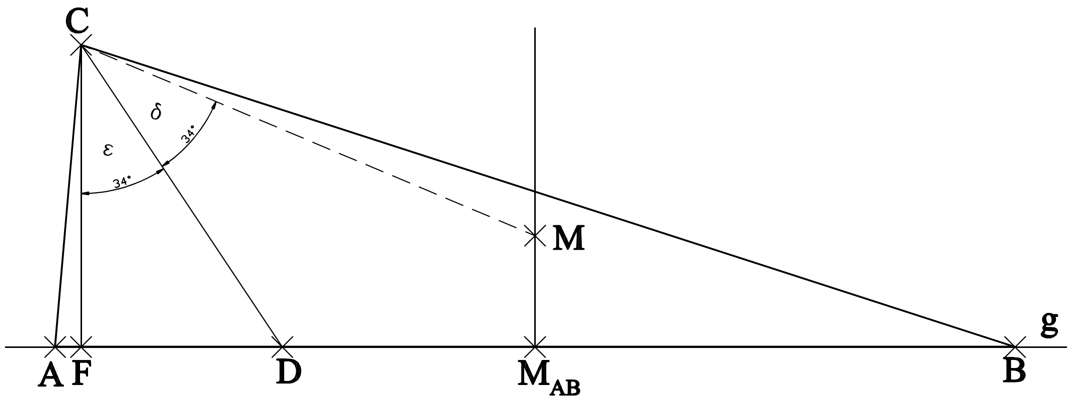
Linien im Dreieck

Wer hätte diesen Zusammenhang vermutet?

Konstruktionsbeschreibung zu Aufgabe 3):

- Zeichne $h_c = CF$
- Konstruiere g mit: $g \perp CF$ und $F \in g$
- $\{M_{AB}\} := k(C\,;\, r = 9\text{ cm}) \cap g$
- $\{D\} := k(C\,;\, r = 6\text{ cm}) \cap g$
- Konstruiere m_{AB} mit: $m_{AB} \perp g$ und $M_{AB} \in m_{AB}$
- Konstruiere δ mit: Scheitelpunkt C, $s_1^{\delta} = CD$ und $\overline{\delta} = \overline{\sphericalangle(CF, CD)}$
- $\{M\} := s_2^{\delta} \cap m_{AB}$
- Zeichne $k(M\,;\, r = \overline{MC})$
- $\{A, B\} = k(M\,;\, r = \overline{MC}) \cap g$
- Zeichne AC und BC

Prinziplösung:



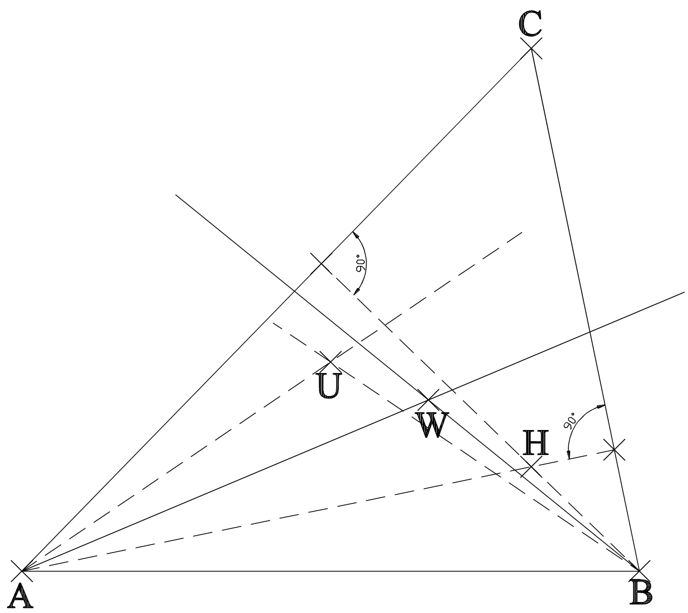
4) Zeichne in dein Heft ein beliebiges, spitzwinkliges Dreieck.

Konstruiere nun die Winkelhalbierenden $\mathbf{w_\alpha}$ und $\mathbf{w_\beta}$, sowie die beiden Höhen $\mathbf{h_a}$ und $\mathbf{h_b}$.

Spiegele nun die Höhe $\mathbf{h_a}$ an der Spiegelachse $\mathbf{w_\alpha}$ und die Höhe $\mathbf{h_b}$ an der Spiegelachse $\mathbf{w_\beta}$.

Diese neuen Spiegelhöhen $\mathbf{h_a'}$ und $\mathbf{h_b'}$ schneiden sich in einem Punkt **U**

Untersuche und begründe mit dem zuvor Gelernten, was das Besondere von **U** ist.

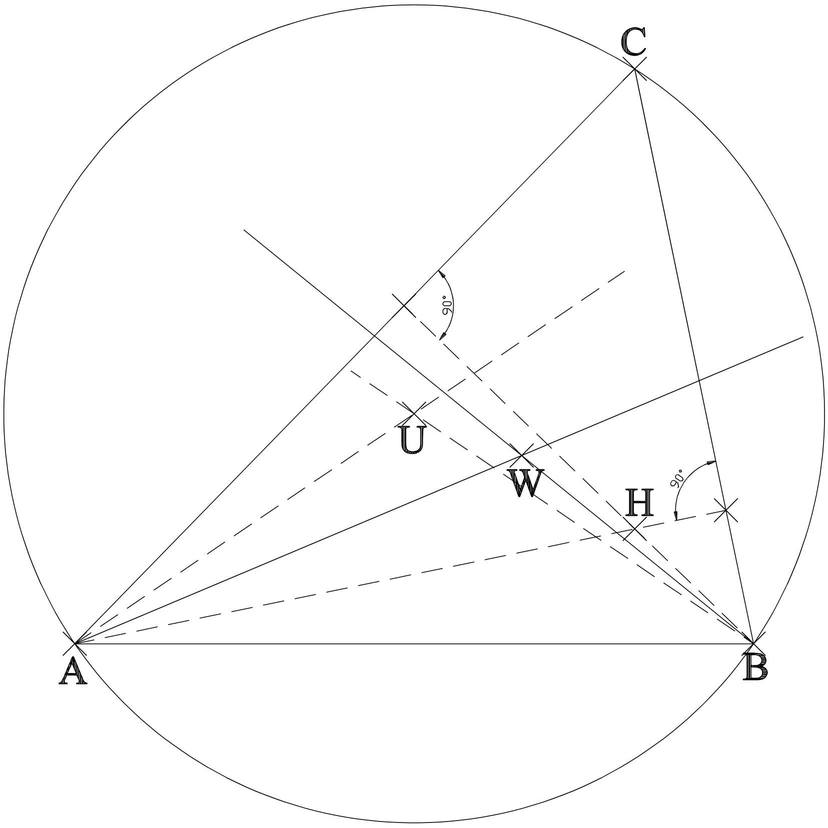


5) Entscheide und begründe: Ist ein Dreieck mit:

$$\overline{\mathbf{h_c}} = 5\text{ cm}\ ;\ \overline{\mathbf{w_\gamma}} = 9\text{ cm}\ ;\ \overline{\mathbf{s_c}} = 6\text{ cm}$$

konstruierbar ? (Vergleiche mit der Aufgabe 3; nun soll gelten: $\overline{\mathbf{w_\gamma}} > \overline{\mathbf{s_c}}$)

Lösung von Aufgabe 4):



Spiegelt man eine Höhe an der zugehörigen Winkelhalbierenden (mit gleichem Eckpunkt), so verläuft die Spiegelhöhe (als Gerade aufgefasst) stets durch den Mittelpunkt des Umkreises. Der Schnittpunkt zweier Spiegelhöhen muss demnach der Mittelpunkt des Umkreises sein.