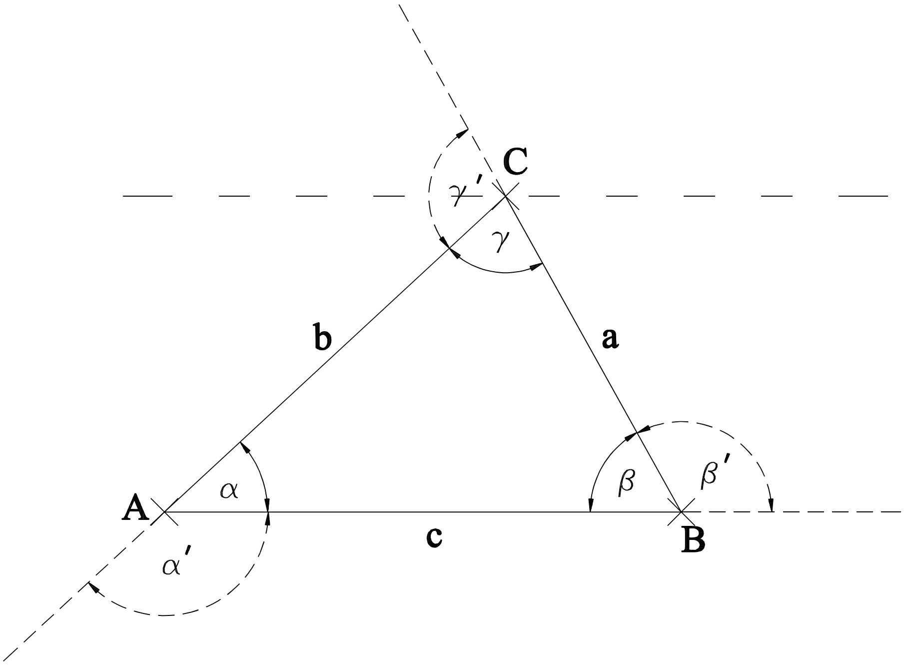
Winkelsummen bei Polygonen - innen und außen

Gibt es auch hier eine Gesetzmäßigkeit?

Zeichne in dein Heft ein beliebiges, spitzwinkliges Dreieck.
Aber bitte nicht zu klein und nicht den Spezialfall eines gleichschenkligen Dreieckes.

Bestimme nun durch Messung die (ungefähre) Größe der drei Innenwinkel des Dreiecks und bilde deren Summe.

Bestimme nun auch die (ungefähre) Größe der drei Außenwinkel des Dreiecks und bilde deren Summe.



Ergebnis deiner Messungen:

$\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} \approx$ $\qquad\qquad$ $\bar{\alpha}' + \bar{\beta}' + \bar{\gamma}' \approx$

Vergleiche mit den Ergebnissen deiner Nachbarn.

Sicherlich hast du herausgefunden, dass im Dreieck höchstwahrscheinlich gilt:

$\boxed{\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 180°}$ und $\boxed{\bar{\alpha}' + \bar{\beta}' + \bar{\gamma}' = 360°}$.

Zum Beweis ziehe als Hilfslinie eine Parallele zu Grundseite AB durch den Punkt C und verlängere die Seite AC über C hinaus. Dadurch wird der Vollwinkel am Punkt C in 6 Teilwinkel zerlegt.

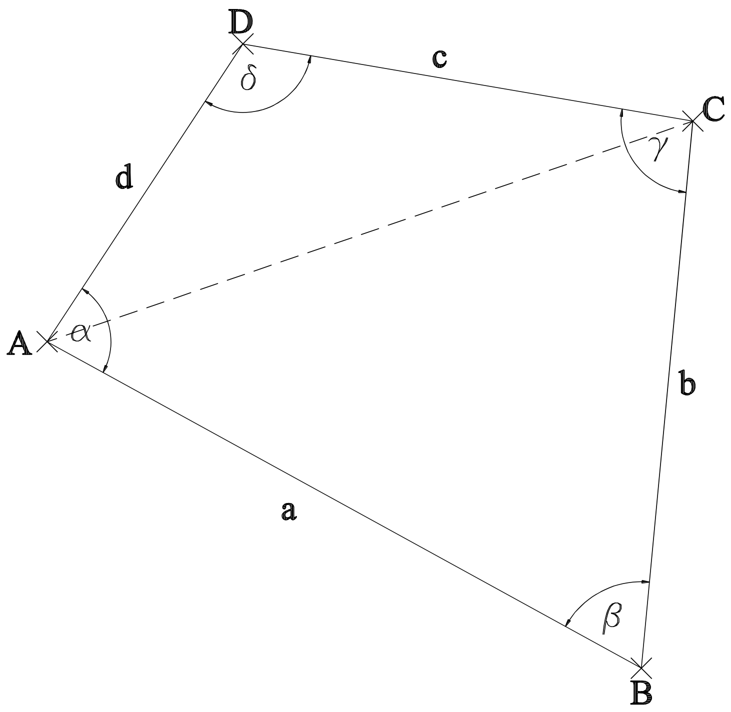
1) Vergleiche nun <u>begründet</u> diese Teilwinkel an C, oder Summen davon, mit den Innenwinkeln und Außenwinkeln des Dreiecks. Bezeichne die Teilwinkel geeignet und begründe danach die Richtigkeit der oben eingerahmten Behauptungen.

Ist hier eigentlich von Bedeutung, dass das Dreieck spitzwinklig war? - Überprüfe den Sachverhalt an einem selbstgewählten stumpfwinkligen Dreieck als Hausaufgabe. Du solltest danach in der Lage sein, das Ergebnis deiner Untersuchungen zu begründen.

Winkelsummen bei Polygonen - innen und außen

Gibt es auch hier eine Gesetzmäßigkeit?

Wie sieht der Sachverhalt nun bei einem Viereck aus?



Zeichne in dein Heft ein beliebiges Viereck.
Aber bitte nicht zu klein und nicht den Spezialfall eines Rechtecks.

Bezeichne das Viereck in der üblichen Weise (Skizze) und kennzeichne auch, nach Verlängerung geeigneter Vierecksseiten, die Außenwinkel des Vierecks.

Auf Messungen wollen wir nun verzichten, denn wir können diesen Fall auf den Winkelsummensatz für Dreiecke zurückführen.
Zeichne dazu eine Diagonale ein, die das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt.

2) Begründe, dass gilt:

$\boxed{\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} + \overline{\delta} = 360°}$ und $\boxed{\overline{\alpha'} + \overline{\beta'} + \overline{\gamma'} + \overline{\delta'} = 360°}$.

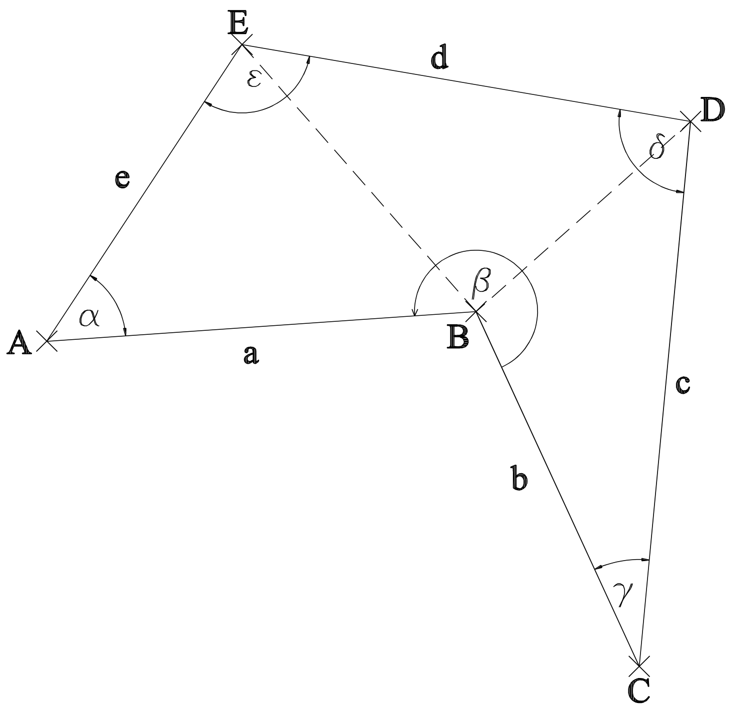
---

3) Und nun ein Fünfeck. Begründe, dass gilt:

$\boxed{\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} + \overline{\delta} + \overline{\varepsilon} = 540°}$

und

$\boxed{\overline{\alpha'} + \overline{\beta'} + \overline{\gamma'} + \overline{\delta'} + \overline{\varepsilon'} = 360°}$.



4) Gib die Größe eines Innenwinkels eines gleichseitigen Fünfecks an. Wie groß ist demnach ein zugehöriger Außenwinkel?

Konstruiere ein regelmäßiges Fünfeck mit Seitenkantenlänge 5 cm als Hausaufgabe. Verwende 4) geeignet.

Winkelsummen bei Polygonen - innen und außen

Gibt es auch hier eine Gesetzmäßigkeit?

Verallgemeinerung: Wie sieht der Sachverhalt nun für ein allgemeines n-Eck (n > 2) aus? - Aus den bisherigen Untersuchungen erscheinen folgende Behauptungen nahe zu liegen:

a) Die Summe der Innenwinkelgrößen eines n-Ecks ist $\boxed{(n-2)\cdot 180°}$.

b) Die Summe der Außenwinkelgrößen eines n-Ecks ist stets $\boxed{360°}$.

Bestätige den Sachverhalt an einem selbstgewählten Beispiel eines allgemeinen Achtecks. Wähle dazu acht Punkte in deinem Heft und verbinde diese Punkte zu einem (konvexen) Achteck. In wie viele Dreiecke (ohne Überschneidungen) kannst du dein Achteck zerlegen?
Damit beträgt die Summe der Innenwinkelgrößen .... .
Damit bleibt für die Summe der Größen der zugehörigen acht Nebenwinkel an den jeweiligen Eckpunkten von den acht gestreckten Winkeln .... übrig.

5) Wie groß müsste jeder Innenwinkel und jeder Außenwinkel eines regelmäßigen Zehnecks sein?