Folgen

Definition 1:
S_o ist genau dann eine **obere Schranke** der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wenn kein Folgenglied größer als S_o ist. ($a_n \leq S_o$ für alle a_n).
Entsprechend wird der Begriff **untere Schranke** definiert.

Definition 2:
Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt genau dann **monoton wachsend**, wenn für alle n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$.
(Der Nachfolger irgendeines Folgengliedes ist also nie kleiner als sein Vorgänger.)
Entsprechend wird definiert, was unter einer **monoton fallenden** Folge zu verstehen ist.
Gilt $a_n < a_{n+1}$ für alle n, so nennt man die Folge **streng monoton** wachsend.

Definition 3:
Unter einer **Epsilon-Umgebung** einer Zahl a versteht man genau diejenigen reellen Zahlen, die größer als $a - \varepsilon$ und kleiner als $a + \varepsilon$ sind.
$U_\varepsilon(a) = \{ x \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \; ; \; x \in \mathbb{R} \}$.

Definition 4:
Eine Zahl h ist genau dann **Häufungswert** einer Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wenn in *jeder* Epsilon-Umgebung von h unendlich viele Folgenglieder liegen.

Definition 5:
Eine Zahl g heißt genau dann **Grenzwert** der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wenn g Häufungswert der Folge ist und außerhalb jeder Epsilon-Umgebung von g höchstens endlich viele Folgenglieder liegen.
g ist also genau dann Grenzwert von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wenn in jeder Umgebung von g unendlich viele Folgenglieder liegen und außerhalb jeder Umgebung nur endlich viele.

Schreib- und Sprechweisen

Wenn die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert g hat, sagt man:

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen g
- g ist Grenzwert von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- g ist LIMES von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

Wenn $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert hat, sagt man:

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent
- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert .

Ist g kein Grenzwert von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, so muß es wenigstens (mindestens) eine Umgebung von g geben, in der nicht unendlich viele Folgenglieder liegen, oder es muß wenigstens eine Umgebung von g geben, so dass außerhalb dieser Umgebung unendlich viele a_n liegen!