

**Mathematik**  
**im**  
**mathematisch - naturwissenschaftlichen Profil**  
**der Sekundarstufe 2**  
(ohne das Halbjahr 13/2)

## Vorbemerkung

Der vorliegende Rahmenplan gilt für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe sowie die ersten 3 Kurssemester im Leistungsfach Mathematik.

Der Rahmenplan gibt die zu unterrichtenden Lerninhalte an; durch spezifische Anmerkungen methodisch-didaktischer Natur werden das intendierte Vorgehen und die beabsichtigte Tiefe ergänzend beschrieben.

Zielgruppe eines Unterrichts auf der Basis dieses Planes sind Schülerinnen und Schüler mit besonderem mathematischen Interesse oder Begabung, die sich in entsprechenden Klassen von Schulen mit mathematisch-naturwissenschaftlichem Schwerpunkt befinden.<sup>1</sup>

Der Rahmenplan wurde in enger Kooperation mit dem mathematischen Institut der Humboldt-Universität entwickelt und orientiert sich an den inhaltlichen Erfordernissen der Vorlesungen des Grundstudiums Mathematik: "Analysis" und "Lineare Algebra".

Selbstverständlich kann der Schulunterricht weder in der Breite noch in der Tiefe diese Vorlesungen (mit Übungen) vorwegnehmen oder ersetzen, doch ist es erklärtes Ziel und Absicht der Planungsgruppe, dass Schulabgänger mit diesem unterrichtlichen Hintergrund einen deutlich leichteren Zugang zu einem Mathematikstudium finden sollen.

### Globale Übersicht über die Unterrichtseinheiten:

Kurs	Thema	Std.	Unterrichtseinheiten	Std.	
ma-F	Analysis	90	Reelle Zahlen, Häufungspunkte und Grenzwerte	25	
			Ganzrationale Funktionen, Stetigkeit, Ableitung	20	
			Untersuchungen ganzrationaler Funktionen	10	
			Grenzwerte von Funktionen, Weiterführung der Stetigkeit	15	
			Weiterführung der Differentialrechnung	20	
	Lineare Algebra und Analytische Geometrie	30	Vektorraum	20	
			Lineare Gleichungssysteme (LGS)	10	
ma-P	Vertiefungsgebiete	60	Prinzip der Vollständigen Induktion	15	
			Algebraische Strukturen	10	
			Komplexe Zahlen	20	
			Wahlgebiet	Einführung in die Lineare Optimierung	15
				Inversion am Kreis	
Weitere Eigenschaften von Gruppen					
MA-12/1	Analysis	75	Weiterführung der Differentialrechnung	30	
			Integralrechnung	30	
			Kontrahierende Abbildungen (Iterationsverfahren)	15	
MA-12/2	Analysis	75	Exponential- und Logarithmusfunktion	15	
			Weiterführung der Differential- und Integralrechnung	60	
MA-13/1	Lineare Algebra und Analytische Geometrie	75	Analytische Geometrie	30	
			Lineare Abbildungen	25	
			Determinanten	10	
			Kegelschnitte im $\mathbb{R}^2$	10	

<sup>1</sup> zur Zeit: Andreas - OG (Friedrichshain), Heinrich-Hertz - OG (Friedrichshain), Herder - OG (Charlottenburg)

**ma-F : Analysis ( 90 Stunden )**

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
10	<p><b>Reelle Zahlenfolgen, Häufungspunkte und Grenzwerte (25 Std.)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reelle Zahlenfolgen als spezielle Funktionen von <math>\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}</math></li> <li>• Veranschaulichung von Folgen auf der Zahlengeraden</li> <li>• Beschränktheit und Monotonie von Folgen</li> <li>• Grenzwert, Konvergenz einer Folge, Häufungswerte, konvergente Teilfolgen einer Folge mit Häufungswerten, Beschränktheit einer konvergenten Folge</li> <li>• Nachweise dafür, dass eine vermutete Zahl tatsächlich Grenzwert einer gegebenen Folge ist mit Hilfe der Grenzwertdefinition</li> </ul>	<p>Es bietet sich an, exemplarisch rekursive und explizite Darstellungen von Folgen gegenüberzustellen (u.a. für geometrische Folgen, geometrische Reihen (Summenformel)) und so eine Verbindung zum Gebiet „Prinzip der Vollständigen Induktion“ zu knüpfen.</p> <p>Es sollten logische Zusammenhänge zwischen den Begriffen Grenzwert und Häufungswert einer Folge diskutiert und ein Ausblick auf sowohl bestimmt als auch unbestimmt divergente Folgen gegeben werden.</p> <p>Aus Zeitgründen sollte man sich auf instruktive Beispiele beschränken.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Konvergenzkriterium von Cauchy</li> <li>• Einschachtelungssatz für konvergente Zahlenfolgen</li> <li>• Supremum und Infimum einer Menge reeller Zahlen</li> <li>• Charakterisierung der Vollständigkeit von <math>\mathbb{R}</math> mittels des Satzes (bzw. Axioms) über die Existenz des Supremums bzw. Infimums einer nach oben bzw. unten beschränkten reellen Menge, Hinweis auf die Äquivalenz dieser Charakterisierung zum Intervallschachtelungsaxiom (ohne Beweis)</li> <li>• Satz von Bolzano-Weierstraß in <math>\mathbb{R}</math></li> </ul>	<p>Der Beweis stellt eine instruktive Anwendung der Konvergenzdefinition für Folgen dar.</p> <p>In diesem Zusammenhang sollte wiederholend (Klasse 9) auf den Vergleich von <math>\mathbb{Q}</math> und <math>\mathbb{R}</math> eingegangen werden (Dichtheit, Abzählbarkeit, Nichtvollständigkeit von <math>\mathbb{Q}</math>; Überabzählbarkeit von <math>\mathbb{R}</math>).</p>
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grenzwertsätze für konvergente Folgen (Summe, Differenz, Produkt, Quotient)</li> <li>• Konvergenzkriterium für monotone Folgen</li> </ul>	<p>Der Nachweis eines Grenzwertsatzes genügt.</p> <p>Anwenden der Grenzwertsätze für den Konvergenznachweis bzw. die Ermittlung von Grenzwerten für Folgen.</p> <p>Als Beispiele für konvergente bzw. divergente Folgen sollten auch Partialsummenfolgen, d.h. Reihen herangezogen werden.</p>
10	<p><b>Ganzrationale Funktionen, Stetigkeit, Ableitung (20 Std.)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reelle Nullstellen ganzrationaler Funktionen (Polynomdivision, Faktorisierung von Polynomen) im Zusammenhang mit ihrer graphischen Darstellung (vorerst ohne Differentialrechnung)</li> </ul>	<p>Nullstellenermittlung durch Lösung quadratischer und biquadratischer Gleichungen (auch mit Parametern) sowie durch Abspalten von Linearfaktoren.</p>

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Stetigkeit von Funktionen an einer Stelle (vorerst Folgendefinition) und auf ihrem Definitionsbereich (insbesondere ganzrationaler Funktionen)</li> <li>• Nullstellensatz, Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum/Minimum</li> </ul>	<p>In diesem Zusammenhang sollten als Gegenbeispiele auch überschaubare Unstetigkeitsstellen einfacher Funktionen untersucht und graphisch veranschaulicht werden.</p> <p>Begründung, dass jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ableitung einer Funktion an einer Stelle als Grenzwert von Differenzenquotientenfolgen</li> <li>• Zusammenhang Stetigkeit - Differenzierbarkeit</li> <li>• Begriff der Ableitungsfunktion</li> <li>• Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten einer Funktion und dem Vorzeichen der 1. Ableitung (vorerst anschaulich)</li> <li>• Ableitungsregeln:  <math>(c)' = 0</math> , <math>(x)' = 1</math>  <math>(x^n)' = n \cdot x^{n-1}</math> ; <math>n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}</math>  <math>(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)</math>  <math>(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)</math> </li> </ul>	<p>Die drei Aspekte der 1. Ableitung sollten anschaulich herausgearbeitet werden:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Tangentenanstieg an der entsprechenden Stelle,</li> <li>2. lokale Änderungsrate (z.B. Momentangeschwindigkeit bei einem Weg-Zeit-Gesetz),</li> <li>3. lineare Approximierbarkeit der Funktion an der entsprechenden Stelle.</li> </ol> <p>An einer Stelle stetige, jedoch nicht differenzierbare Funktionen sollten angesprochen werden.</p> <p>Zu vorgegebenen Funktionen die Ableitungsfunktion ermitteln und graphisch darstellen.</p> <p>Vergleich der Graphen von <math>f'</math> und <math>f''</math>.</p> <p>Als Anwendung: Ableitung ganzrationaler Funktionen.</p>
10	<p><b>Untersuchungen ganzrationaler Funktionen</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Relative Extrema einer Funktion, Hoch- und Tiefpunkte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte eines Funktionsgraphen mit entsprechenden notwendigen und hinreichenden Kriterien (auch Vorzeichenkriterium) für deren Existenz bei differenzierbaren Funktionen</li> <li>• Absolute Extrema einer Funktion auf einer Menge, Extremwertaufgaben, die auf ganzrationale Zielfunktionen führen</li> <li>• Untersuchung ganzrationaler Funktionen (Achsen Schnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte, Monotonieintervalle, Symmetrie)</li> <li>• Newtonverfahren</li> </ul>	<p>Es sollte verdeutlicht werden, dass diese Begriffsbildungen nicht an die Differenzierbarkeit der entsprechenden Funktionen gebunden sind. Beim Beweis der hinreichenden Kriterien kann man sich auf den globalen Monotoniesatz stützen (anschaulich), der erst in MA-12/1 mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes der Differentialrechnung bewiesen wird.</p> <p>An die Betrachtung hinreichender Bedingungen für die Konvergenz ist nicht gedacht.</p>

**ma-F : Analysis ( 90 Stunden )**

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
15	<p><b>Grenzwerte von Funktionen, Weiterführung der Stetigkeit</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Grenzwertuntersuchungen (insbesondere an Definitionslücken)</li> <li>• Übertragung der Grenzwertsätze für Folgen auf solche für Funktionen</li> <li>• Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle (<math>\epsilon - \delta</math> - Charakterisierung)</li> <li>• Stetigkeit ausgewählter Funktionen auf ihrem Definitionsbereich</li> <li>• Stetige Fortsetzbarkeit</li> <li>• Verknüpfung stetiger Funktionen (einschließlich Verkettung)</li> <li>• Stetige Differenzierbarkeit</li> </ul>	<p>Für Funktionsterme wie: <math>\frac{x^2 - 1}{x + 1}</math>, <math>\frac{ x }{x}</math>, <math>\frac{\sin(x)}{x}</math>, <math>\frac{\cos(x) - 1}{x}</math>, <math>\sin\left(\frac{1}{x}\right)</math>, <math>x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)</math> ...</p> <p>Für die Äquivalenz der Folgendefinition mit der <math>\epsilon - \delta</math> - Charakterisierung sollte anschauliches Verständnis erreicht werden.</p> <p>z.B. Winkelfunktionen. Es sind auch Beispiele für nicht stetige bzw. nicht stetig fortsetzbare Funktionen zu behandeln.</p>
10	<p><b>Weiterführung der Differentialrechnung (20 Std.)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ableitung trigonometrischer Funktionen</li> <li>• Produkt-, Quotienten- und Kettenregel</li> <li>• Ableitung der Umkehrfunktion</li> <li>• Ableitung von <math>x^r</math>; <math>r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}</math></li> </ul>	<p>Die Ableitung von <math>\cos</math>, <math>\tan</math>, <math>\cot</math> kann auf die Ableitung von <math>\sin</math> gestützt werden.</p> <p>Wiederholung zu Umkehrfunktionen aus Klasse 10, graphische Darstellung von <math>f</math> und <math>f^{-1}</math>.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Extremwert- und andere Anwendungsaufgaben (Physik, Technik) zu den bisher behandelten Funktionenklassen</li> </ul>	<p>Komplexe Übungen in Anwendungssituationen zu den bisher behandelten Funktionenklassen und Verfahren.</p>

**ma-F : Lineare Algebra und Analytische Geometrie ( 30 Stunden )**

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
10	<b>Vektorraum (20 Std.)</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Struktur eines Vektorraumes</li><li>• Linearkombination, Erzeugendensystem, Lineare Hülle</li><li>• Basen als minimale Erzeugendensysteme, Lineare Unabhängigkeit</li></ul>	<p>Vektorraumstruktur z.B. aus der Lösungsmenge einer linearen Gleichung in 3 Variablen.</p> <p>Neben dem exemplarischen Einstiegsbeispiel eines Vektorraumes sollten in der Folge weitere Beispiele, z.B. Funktionenräume behandelt werden.</p> <p>Auf geometrische Interpretationen sollte an dieser Stelle noch bewusst verzichtet werden, um den Begriff des Vektors bei den Schülern allgemeiner zu verankern.</p> <p>Es empfiehlt sich, in Schreibweisen Zeilen und Spalten sauber zu unterscheiden.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"><li>• Eindeutigkeit der Darstellung (Spalten) bzgl. fester Basis (Basiswechsel - kanonische Basis)</li><li>• Unterräume, Dimension (Austauschsatz, Basisergänzungssatz)</li></ul>	
10	<b>Lineare Gleichungssysteme (LGS)</b> <p>Lösungsmengenbestimmung über das Gauß-Verfahren im homogenen und inhomogenen Fall (Zusammenhang: Lösungsmenge eines inhomogenen und des zugehörigen homogenen Systems)</p> <p>Aus Beispielen: Propädeutische Fassung des Dimensionssatzes (Rang eines LGS als maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren; Dimension der Lösungsmenge als Anzahl der frei wählbaren Variablen)</p>	<p>Hier, in Klasse 11, steht das rechentechnische Verfahren im Vordergrund. Die wesentlich verschiedenen Fälle der Lösungsmengen sollen sich aus geeigneten Beispielen ergeben.</p> <p>Der Dimensionssatz wird in Kl. 12 im Zusammenhang mit Linearen Abbildungen wieder aufgegriffen und vertieft.</p>

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
15	<p><b>Prinzip der vollständigen Induktion</b></p> <p>Anwendungen u.a.:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Summenformeln</li> <li>• Binomischer Satz</li> <li>• Teilbarkeitsaussagen</li> <li>• Ungleichungen</li> <li>• rekursiv definierte Folgen</li> </ul>	<p>Bei den Ungleichungen ist auf jeden Fall zu behandeln:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Bernoullische Ungleichung</li> <li>• Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel</li> </ul>
10	<p><b>Algebraische Strukturen</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Begriffe: Gruppe, Ring, Körper, Anordnung (<math>\mathbb{Q}</math> und <math>\mathbb{R}</math> als angeordnete Körper)</li> <li>• Als Folgerungen aus den Gruppenaxiomen Nachweis der Eindeutigkeit des neutralen Elements, der Eindeutigkeit der inversen Elemente und der Eigenschaft <math>(h^{-1})^{-1} = h</math></li> </ul>	<p>Es bietet sich an, neben den Zahlbereichen weitere Beispiele zur Festigung der Begriffsbildung, z.B. der Gruppe, zu behandeln.</p>
20	<p><b>Komplexe Zahlen</b></p> <p>Gaußsche Zahlenebene als Modell für <math>\mathbb{C}</math> (Einbettung von <math>\mathbb{R}</math> in <math>\mathbb{C}</math>)  Rechnen in <math>\mathbb{C}</math>, verbunden mit der zugehörigen geometrischen Interpretation</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Addition - Subtraktion,</li> <li>• Multiplikation (Polarkoordinaten)-Division (Inversenbildung - Konjugation)</li> <li>• Wurzeln - Potenzen (Satz von Moivre), n-te Einheitswurzeln/Kreisteilung</li> <li>• Lösung quadratischer Gleichungen mit komplexen Koeffizienten</li> </ul> <p>Faktorisierung von Polynomen mit reellen Koeffizienten über <math>\mathbb{C}</math> und <math>\mathbb{R}</math> (Fundamentalsatz der Algebra - Primpolynome)</p>	<p>Bei der Bestimmung von Wurzeln: Übergang zu Polarkoordinaten,</p> <p>Hier bietet sich der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms zur Bestimmung von Nullstellen an, ein exakter Beweis kann nicht geführt werden.</p>
	<p><i>In diesem Lernabschnitt mit 15 Stunden ist eine der drei folgenden Varianten zu wählen.</i></p> <p><b>Einführung in die lineare Optimierung</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem</li> <li>• Einführung in Grundbegriffe der Graphentheorie: Graph, Kanten, Knoten, Quelle, Senke</li> <li>• Darstellung und Lösung des ursprünglichen Optimierungsproblems mit Hilfe von Graphen</li> </ul>	<p>Beispiel eines zeitoptimalen Verkehrsweges. Als historisch interessanter Einstieg kann das Königsberger Brückenproblem gewählt werden.</p> <p>Anwendungsbeispiele: Optimierung von Zeit, Strecken, Kosten</p>

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
	<p><b>Inversion am Kreis</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Inversion am Kreis: Definition, einfache Eigenschaften; Abbildungsgleichung im Koordinatensystem mit Polar- und kartesischen Koordinaten</li> <li>• Abbildung einfacher Figuren durch Kreisinversion</li> <li>• Kurven in Polarkoordinatendarstellung, ihre Bilder bei Kreisinversion bzw. ihre Erzeugung durch Kreisinversion</li> </ul> <p><b>Weitere Eigenschaften von Gruppen</b></p> <p>Weitere Beispiele für kommutative und nicht-kommutative Gruppen: (Arithmetische Beispiele, Gruppe der n-ten Einheitswurzeln, Permutationsgruppen, Symmetriegruppen, Drehgruppen, Restklassengruppen,... ) Ablesen bekannter Gruppeneigenschaften (außer Assoziativität) aus den Gruppentafeln</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Weitere Gruppeneigenschaften :               <ol style="list-style-type: none"> <li>1. In jeder Gruppe sind Gleichungen der Form <math>a \circ x = b</math> und <math>y \circ a = b</math> stets eindeutig lösbar.</li> <li>2. <math>(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}</math></li> </ol> </li> <li>• Begriffe: Zyklische Gruppe, erzeugendes Element, Ordnung einer endlichen, zyklischen Gruppe</li> <li>• Begriff: Isomorphie von Gruppen Nachweise einiger vermuteter Isomorphismen, z.B.:               <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Eine zyklische Gruppe der Ordnung n ist isomorph zur Restklassengruppe mod n.</li> <li>2. Isomorphie zwischen den Gruppen <math>[\mathbb{R}_{&gt;0}, \cdot]</math> und <math>[\mathbb{R}, +]</math> vermöge <math>\varphi(x) = \ln(x)</math></li> </ol> </li> </ul>	<p>Bei der Inversion im Koordinatensystem sollte grundsätzlich der Mittelpunkt des Inversionskreises im Ursprung liegen.</p> <p>Beispiele: Geraden, Kreise, Hyperbel, Parabel</p> <p>Beispiele: Kreis, Ellipse, Parabel, Pascalsche Schnecke, Lemniskate, Kardioide, Zissoide, Strophoide</p> <p>Ziel ist es, weitere Modelle für Gruppen aus unterschiedlichen Objektbereichen zu finden, um vielfältiges Material für anschließende Strukturvergleiche bereitzustellen. Es sollten auch Gegenbeispiele diskutiert werden (algebraische Strukturen, welche keine Gruppen sind, z.B. Halbgruppen,...).</p> <p>Bei den Beweisen dieser Eigenschaften sollten Fragen der „Beweisökonomie“ (Geltung dieser Eigenschaften in <b>allen</b> Gruppen) herausgestellt werden. Es bietet sich an, exemplarisch einige Gleichungen in gegebenen Gruppen zu lösen (z.B. in Permutationsgruppen). Anhand der erstellten Gruppentafeln können die Schüler die Existenz zyklischer Gruppen nachweisen. Es ist naheliegend zu zeigen, dass zyklische Gruppen kommutativ sind. Die erstellten Gruppentafeln lassen zwischen den Gruppen gewisse „Strukturgleichheiten“ erkennen, welche von den Schülern präzisiert werden sollten (Eineindeutigkeit der Zuordnung, Operationstreue).</p>



Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
10	<p><b>Weiterführung der Differentialrechnung (30 Std.)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wiederholungen zu Inhalten der Klassenstufe 11</li> <li>• Untersuchungen gebrochen-rationaler Funktionen unter den Aspekten:               <ul style="list-style-type: none"> <li>– maximale Definitionsmenge</li> <li>– Verhalten in der Umgebung von Definitionslücken</li> <li>– Asymptotenfunktionen (Verhalten für <math>x \rightarrow \infty</math> bzw. <math>x \rightarrow -\infty</math>)</li> </ul> </li> </ul>	<p>Komplexe Übungen zu Anwendungssituationen mit bisher behandelten Funktionenklassen.</p> <p>Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion sollte grob (unter Stetigkeitsgesichtspunkten) ohne vollständige Kurvendiskussion (d.h. ohne Untersuchung auf relative Extrema und Wendepunkte) skizziert werden können.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funktionsuntersuchungen komplexerer Art mit:               <ul style="list-style-type: none"> <li>– trigonometrischen Funktionen</li> <li>– Wurzelfunktionen</li> <li>– gebrochen-rationalen Funktionen</li> </ul> </li> <li>• Funktionsscharen</li> </ul>	<p>Hier ist an eine exemplarische Auswahl gedacht, die unterschiedliche rechentechnische Strategien bei den verschiedenen Funktionenklassen verdeutlicht.</p> <p>Die Beschränkung auf einen Parameter erscheint sinnvoll. Auch Ortskurven, z.B. der relativen Extrema / Wendepunkte einer Schar kommen in Betracht.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Satz von Rolle</li> <li>• 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung</li> <li>• Globaler Monotoniesatz</li> </ul>	<p>Die Sätze eignen sich besonders zur Vergabe von Referaten.</p> <p>Die Anwendung der Sätze sollte nicht zu kurz kommen.</p>
10	<p><b>Integralrechnung (30 Std.)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Inhalte von Flächen unter Graphen als Grenzwerte</li> <li>• Eine Definition des bestimmten Integrals (Riemann-Integral) für auf <math>[a, b]</math> definierte und beschränkte Funktionen mittels ausgezeichneter Zerlegungsfolgen</li> <li>• Beispiel einer nicht integrierbaren Funktion</li> <li>• Existenz des bestimmten Integrals für auf dem Integrationsintervall monotone bzw. stetige Funktionen</li> <li>• Eigenschaften des bestimmten Integrals (Intervalladditivität, Linearität)</li> </ul>	<p>Flächeninhalte als Grenzwerte von Folgen von Ober- bzw. Untersummen berechnen.</p> <p>Definition z.B. mittels Ober- und Untersummen oder mittels Riemanscher Zwischensummen.</p> <p>Für den Nachweis der Integrierbarkeit einer über <math>[a, b]</math> stetigen Funktion ist die Aussage des Satzes über die gleichmäßige Stetigkeit erforderlich.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mittelwertsatz der Integralrechnung, Integralfunktion, Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung</li> <li>• Stammfunktion, unbestimmtes Integral</li> </ul>	<p>Geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes.</p>

**MA-12/1 : Analysis (75 Stunden )**

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Satz über die Differenz zweier Stammfunktionen <math>F_1, F_2</math> einer Funktion <math>f</math></li> <li>• Berechnen einfacher bestimmter Integrale mittels Stammfunktionen</li> <li>• Methode der partiellen Integration</li> </ul>	<p>Ermittlung von Stammfunktionen mittels partieller Integration.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Inner- und außermathematische Anwendungen: Flächeninhalte, Volumen von Rotationskörpern (Kugel, Paraboloid, Ellipsoid), physikalische Arbeit</li> </ul>	<p>Die Substitutionsmethode steht an dieser Stelle noch nicht zur Verfügung. Bei der Ermittlung des Volumens von Rotationskörpern bei Rotation um die y-Achse sollte auch die Zylinder-Schalen-Methode angewendet werden.</p>
15	<p><b>Kontrahierende Abbildungen (Iterationsverfahren)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Banachscher Fixpunktsatz</li> <li>• Konvergenzordnung</li> <li>• Konvergenzverbesserung</li> </ul>	<p>Das früher behandelte Newtonverfahren sollte mit seiner Iterationsvorschrift: <math>x_{n+1} := \varphi(x_n)</math> mit <math>\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}</math> einbezogen werden.</p> <p>Es bietet sich an, auch das verallgemeinerte Verfahren von Heron:</p> $x_{n+1} := \frac{1}{k} \cdot \left( (k-1) \cdot x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \rightarrow \sqrt[k]{a}$ <p>entsprechend zu interpretieren.</p> <p>Bei der Konvergenzverbesserung genügt es, die Addition eines linearen Terms (mit geeigneter 'Steigung' - z.B. 1. MWS) zu behandeln.</p>

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
15	<p><b>Exponential- und Logarithmusfunktion</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Einführung der ln-Funktion über das Integral  <math display="block">\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} \cdot dt ; x \in \mathbb{R}^+</math></li> <li>• Folgerungen aus der Integraldefinition (einzige Nullstelle, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Monotonie)</li> <li>• Herleitung der Funktionalgleichung der ln-Funktion, Ermittlung der Wertemenge  <math>W(\ln) = \mathbb{R}</math></li> <li>• Ermittlung der Basis der ln-Funktion mit Hilfe der Zwischeneigenschaft des bestimmten Integrals</li> <li>• Aus den obigen Betrachtungen ergibt sich  <math display="block">\int \frac{dx}{x} = \ln( x ) + C ; x \in \mathbb{R}, x \neq 0</math></li> <li>• Einführung der e-Funktion als Umkehrfunktion der ln-Funktion, Eigenschaften der e-Funktion</li> </ul>	<p>Äquivalente Zugänge sind hier natürlich möglich.</p> <p>Dieser Weg bietet sich wegen seiner Effektivität an. - Es werden alle zentralen Begriffe aus der Analysis angewendet.</p> <p>Die Eigenschaften der e-Funktion ergeben sich als Folgerungen aus den entsprechenden Eigenschaften der ln-Funktion.</p>
10	<p><b>Weiterführung der Differential- und Integralrechnung (60 Std.)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Integration mittels Substitution, Differentiale</li> <li>• Integrale der Form  <math display="block">\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln( f(x) ) + C</math></li> <li>• Integration mittels einfacher Partialbruchzerlegungen</li> <li>• Arcus-Funktionen</li> </ul>	<p>Es werden nur reelle Nullstellen des Nennerpolynoms betrachtet.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Regeln von de l'Hospital</li> <li>• Funktionsuntersuchungen zur e-Funktion und ln-Funktion</li> <li>• Uneigentliche Integrale</li> </ul>	<p>Beweis einer Regel, Mitteilung der anderen Varianten.</p>
15	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Weitere Anwendungen der Integralrechnung (Bogenlänge, Oberflächen von Rotationskörpern)</li> <li>• Numerische Integrationsmethoden</li> </ul>	<p>Als Anwendung für die Bogenlänge bietet es sich an, die Krümmung eines Funktionsgraphen in einem Kurvenpunkt zu ermitteln.</p>

**MA-12/2 : Analysis (75 Stunden )**

<b>Std.</b>	<b>Lerninhalte</b>	<b>Anmerkungen</b>
10	<ul style="list-style-type: none"><li>• Satz von Taylor mit Restglied</li><li>• Darstellung von Funktionen durch Taylorreihen</li></ul>	Mittels Restgliedabschätzung sollten einige Funktionen exemplarisch in eine Taylorreihe entwickelt werden.
15	<ul style="list-style-type: none"><li>• Einfache gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen</li><li>• Zusammenfassendes kleines Projekt</li></ul>	<p>Über die Modellierung realer Prozesse (Wachstum, Zerfall,...) gelangt man zu entsprechenden Differentialgleichungen. Gedacht ist hier an die Anwendung elementarer Lösungsverfahren (Trennung der Variablen).</p> <p>Es ist an eine komplexe Aufgabenstellung (etwa ein Auftrag an die Schüler) zu ausgewählten, bisher behandelten Gebieten gedacht.</p>

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
10	<p><b>Analytische Geometrie (30 Std.)</b></p> <p>Der affine (Punkt-) Raum (<math>A^3</math>; Geometrie) mit dem zugehörigen Vektorraum der Verschiebungen (<math>V^3</math>)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>die 3 Axiome des Zusammenhangs</li> <li>affines Koordinatensystem und zugehörige (kanonische) Basis des Vektorraumes</li> </ul> <p>Geometrische Probleme (im affinen Raum):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Punkte, Geraden und Ebenen im <math>\mathbb{R}^3</math></li> <li>Untersuchung von Lagebeziehungen</li> </ul>	<p>Hier soll exemplarisch die Operation einer Gruppe auf einer Menge (einfach transitive Wirkung), d.h. die Nutzung einer beigeordneten Struktur verdeutlicht werden.</p> <p>An geeigneten Stellen können die Kenntnisse und Voraussetzungen aus dem <math>\mathbb{R}^2</math> sinnvoll aufgegriffen werden.</p> <p>Lagebeziehungen Gerade/Ebene und Ebene/Ebene sollten nur beispielhaft behandelt werden.</p>
10	<p>Geometrische Probleme (mit Skalarprodukt):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Skalarprodukt (Abstände; Längen; Winkel zwischen Geraden; Abstand eines Punktes von einer Geraden; Flächeninhalt eines Dreiecks; Abstand windschiefer Geraden; Cauchy- Schwarzsche Ungleichung)</li> </ul>	<p>Zentraler Aspekt ist der geometrische Gedanke der Projektion auf eine vorgegebene Richtung.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ebenengleichung in Normalen- (Koordinaten-) form; normierte Vektoren - Ebenenabstand zum Ursprung (Hessesche Normalenform; Abstand: Punkt - Ebene)</li> <li>Inzidenzuntersuchungen komplexerer Art; Gerade - Ebene; Ebene - Ebene; Schnittwinkel usw.</li> </ul>	<p>Hier ist auch an die variable Herleitung von Ebenengleichungen aus unterschiedlichen bestimmten Objekten gedacht.</p> <p>Empfohlene Ergänzung: Kugeln im <math>\mathbb{R}^3</math>; Inzidenzuntersuchungen mit Geraden und Ebenen; Tangentialebenen</p>
12	<p><b>Lineare Abbildungen (25 Std.)</b></p> <p>Lineare Abbildungen als strukturverträgliche Abbildungen zwischen Vektorräumen. Begriffsbildungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Kern(f) als Unterraum des Urbildraumes; Zusammenhang mit Lösungsmenge eines homogenen LGS (dreidimensional-geometrisch: 3-Ebenenschnitt durch den Ursprung)</li> <li>Bild(f) als Unterraum des Bildraumes</li> <li>Matrix <math>A_f</math> als basisabhängige Darstellung einer linearen Abbildung mit den Spaltenvektoren als Bilder der Basisvektoren; <math>\text{Rang}(A_f) = \dim \text{Bild}(f)</math>; Interpretation eines inhomogenen LGS über Bild(f) (dreidimensional-geometrisch; 3-Ebenenschnitt, aus dem Ursprung verschoben)</li> <li>Rangbestimmung mit Hilfe elementarer Umformungen</li> <li>Dimensionssatz</li> </ul>	<p>LGS mit den Fragen nach der Lösungsmenge sollte stets auch in den äquivalenten Darstellungen interpretiert werden:</p> $f(\vec{x}) = \vec{b}, A_f \circ \vec{x} = \vec{b}, \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{a}_i = \vec{b}.$

**MA-13/1 : Lineare Algebra und Analytische Geometrie (75 Stunden )**

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
13	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hintereinanderausführung linearer Abbildungen (Matrizenmultiplikation); Matrizenaddition und -vervielfachung</li> <li>• Inverse Matrizen (Existenz der Umkehrabbildung); Eindeutige Lösbarkeit von LGS mit den dazugehörigen Interpretationen, z.B.: <math>\dim \text{Kern}(f) = 0</math> etc.</li> <li>• Anwendungsaufgaben (z.B.: mehrstufige Produktionsprozesse etc.)</li> </ul>	
10	<p><b>Determinanten</b></p> <p>Das Kreuzprodukt, entwickelt aus der geometrischen Senkrechtrichtung im <math>\mathbb{R}^3</math> (Bestimmung von Normalenvektoren) mit seinen Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Flächeninhaltsbestimmung über Betrag</li> <li>• Verträglichkeit mit Skalarprodukt - Spatprodukt (Volumenbestimmung z.B. einer dreiseitigen Pyramide)</li> <li>• Determinanten (zweireihige als Komponenten eines Normalenvektors; dreireihige als Volumen eines Spats)</li> <li>• Determinantenentwicklungssatz; Cramersche Regel</li> </ul>	<p>Aus Zeitgründen wird man sich bei dem Determinantenentwicklungssatz und der Cramerschen Regel evtl. mit einer propädeutischen, beispielorientierten Einsicht begnügen müssen.</p>
10	<p><b>Kegelschnitte im <math>\mathbb{R}^2</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• graphische Darstellung verschiedener Quadriken (gegebenenfalls ohne Mittelpunktverschiebung) aus quadratischen Gleichungen in zwei Variablen</li> <li>• Hauptachsentransformation im <math>\mathbb{R}^2</math> (Drehmatrizen)</li> <li>• Interpretation mit Hilfe affiner Abbildungsmatrizen</li> </ul>	<p>An eine eigenständige Theorie der Kegelschnitte mit der Entwicklung der unterschiedlichen Gleichungsformen (Mittel-, Scheitel-, Brennpunktform) und Herleitung der Eigenschaften etc. ist nicht gedacht.</p>