Thema: Integrationsmethoden[1]

(Sie sollten Ihre Erläuterungen an der Beispielfunktion auf Blatt 2: **f** mit $\mathbf{f}(x) = x^2 \cdot [\mathbf{ln}(x)]^2$ verdeutlichen!)

---

a) Erläutern Sie, was man unter dem Wert des nebenstehenden Integrals **gemäß der Grunddefinition** und nach dem **Hauptsatz der Analysis** versteht.

$$\boxed{\int_{0,1}^{1} f(x)\cdot dx}$$

b) Könnten Sie der Fläche unter dem Graphen von **f** über dem Intervall $[\,0\,;\,1\,]$ eine Maßzahl zuordnen? - Wenn ja, - wie? - Welche mathematischen Probleme tauchen eventuell dabei auf ?

c) Äußern Sie sich allgemein zu den folgenden beiden Aussagen über eine beliebige Funktion **f** (bezogen auf ein abgeschlossenes Intervall $[a;b] \subset D_f$):

(1) **f** ist integrierbar
(2) **f** besitzt eine Stammfunktion

Sind die Aussagen äquivalent?

Anleitung: Funktionsgleichungen möglicher Beispielfunktionen:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x<0 \\ +1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} F(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ F(0) = 0 & \end{cases}$$

d) Erläutern Sie die Überlegungen / Strategie zur Entwicklung der nebenstehenden Beziehung zur Berechnung des Inhaltes der Mantelfläche **M** des Rotationskörpers, der bei Rotation der ersten Beispielfunktion um die x-Achse über dem Intervall $[\,0{,}1\,;\,1]$ entsteht.

$$\boxed{\mathbf{M} := \int_{0,1}^{1} 2\cdot\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\cdot dx}$$

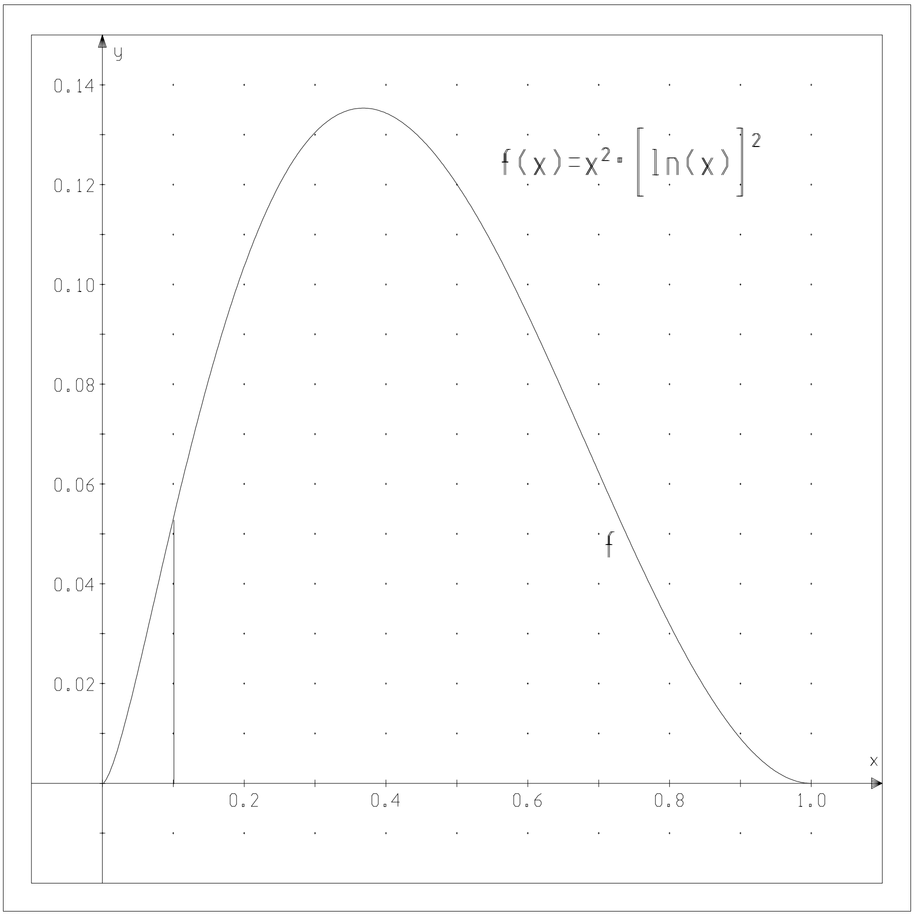
e) Auf Blatt 2 ist der Graph einer **Kardioide** skizziert, einer ‘Kurve in Parameterdarstellung’, d.h. die x- und y-Koordinate jedes Kurvenpunktes hängt vom Parameter $\boldsymbol{\varphi}$ (Polarwinkel) ab ($\varphi \in [\,0\,;\,2\cdot\pi\,]$).
Entwickeln Sie eine Beziehung zur Bestimmung der Kurvenlänge **l** der Kardioide.

---

[1] Bemerkung: Es sollen keine expliziten Rechnungen durchgeführt werden; nur das prinzipielle mathematische Vorgehen bzw. der prinzipielle mathematische Zusammenhang soll deutlich werden!

Zu Aufgabenteilen:

a), b) und d)



Zu Aufgabenteil e):

Kardioide:

$x(\varphi) = 2 \cdot \cos(\varphi) - \cos(2\cdot\varphi)$
$y(\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) - \sin(2\cdot\varphi)$