Aufgabe 2 (32% der erwarteten Leistung) **1. Vorschlag**

Ein zweistufiger Produktionsprozeß wird durch zwei lineare Abbildungen **f** und **g** beschrieben, und zwar ist **f** die Abbildung vom Vektorraum der Fertigprodukte in den Vektorraum der Zwischenprodukte, **g** die Abbildung vom Vektorraum der Zwischenprodukte in den Vektorraum der Rohstoffe. Bezüglich der kanonischen Basen werden die Abbildungen durch folgende Matrizen beschrieben:

$$A_f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;;\; B_g := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

---

a) Geben Sie die Dimensionen der 3 Vektorräume an und beschreiben Sie die inhaltliche Bedeutung der 2. Spalte der Matrix $\mathbf{B_g}$!

---

b) Berechnen Sie die Rohstoffverbrauchsmatrix und geben Sie die notwendige wöchentliche Bereitstellung an, wenn pro Woche von jedem Fertigprodukt jeweils 50 Einheiten produziert werden sollen.

---

c) Beweisen Sie: Die Spaltenvektoren von $\mathbf{A_f}$ sind linear unabhängig!

- Begründen Sie, warum aus dieser Tatsache hier folgt, daß die Abbildungsgleichung $f(\vec{v}) = \vec{w}$ stets eine eindeutige Lösung haben muß!

- Erläutern Sie, ob sich <u>jede</u> Rohstoffmenge, dargestellt durch einen Rohstoffvektor $\vec{z}_0$, zu einer geeigneten Menge Zwischenprodukte $(\vec{w}_0)$ verarbeiten läßt, ohne daß dabei Rohstoffe übrig bleiben.

---

d) Es gelte $f(\vec{v}) = \vec{w}$ mit $\vec{w} := \begin{pmatrix} 55 \\ 60 \\ 45 \end{pmatrix}$, wobei $\vec{w}$ spezielle Mengenanzahlen von Zwischenprodukten angibt. Berechnen Sie durch Lösung eines geeigneten linearen Gleichungssystems, welche Fertigprodukte (in welchen Anzahlen) aus diesen Zwischenprodukten herstellbar sind.

---

e) Aufgrund erhöhter Nachfrage nach dem Fertigprodukt $\mathbf{F_3}$ soll die wöchentliche Produktion auf 60 Einheiten erhöht werden, von $\mathbf{F_2}$ sollen weiterhin 50 Einheiten hergestellt werden, während die Produktion von $\mathbf{F_1}$ wegen Lagerbeständen eingeschränkt werden kann.

Ist diese Umorganisation der Produktion bei wöchentlich festen Rohstoffmengen $\vec{z} := \begin{pmatrix} 900 \\ 2650 \\ 1300 \\ 1600 \end{pmatrix}$ möglich, und wenn ja, wieviele Einheiten von $\mathbf{F_1}$ können dann noch maximal hergestellt werden? - Werden dann noch alle wöchentlich gelieferten Rohstoffe verbraucht?
