Gegeben sind eine Kugel **k**, eine Gerade **g** und eine Ebene **e** durch die Gleichungen

$$\mathbf{k} : x^2 + y^2 + z^2 = 49 \quad ;$$

$$\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad r \in \mathbb{R} \quad ;$$

$$\mathbf{e} : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 \quad .$$

a) Die Gerade **g** ist Sekante der Kugel **k**. - Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden Durchstoßpunkte $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$ und berechnen Sie die Länge der Strecke $\mathbf{S_1S_2}$.

b) Bestimmen Sie Gleichungen der Tangentialebenen $\mathbf{e_{T1}}$ und $\mathbf{e_{T2}}$ an die Kugel **k** in den Punkten $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$ in Normalenform.

c) Bestimmen Sie eine vektorielle Gleichung für die Schnittgerade $\mathbf{g_s}$ der beiden (nichtparallelen) Tangentialebenen $\mathbf{e_{T1}}$ und $\mathbf{e_{T2}}$ sowie die Größe des Schnittwinkels $\boldsymbol{\alpha}$, unter dem sich die Ebenen schneiden.

d) Äußern Sie sich zur besonderen Lage der Geraden **g** und $\mathbf{g_s}$ im affinen Raum und relativ zueinander. Begründen Sie, dass durch die Beziehung:

$$d := \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{S_1 S_2}}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

der Abstand der Geraden **g** und $\mathbf{g_s}$ bestimmt werden kann und geben Sie die Größe von d an.

e) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis von Teil d) über eine vektorielle Methode zur Bestimmung des Abstandes zweier windschiefer Geraden.

f) Begründen Sie, dass die Ebene **e** und die Kugel **k** einen Schnittkreis gemeinsam haben. Geben Sie Mittelpunkt und Radius dieses Schnittkreises an.