Aufgabe 2 (34,3% der erwarteten Leistung) **1. Vorschlag**

Zwischen den Vektorräumen **V**, **W** und **Z** (**V**, **W**, **Z** $\subseteq \mathbb{R}^4$) existieren lineare Abbildungen **f** und **g**, so dass gilt: **f**(**V**) $\subseteq$ **W** und **g**(**W**) $\subseteq$ **Z**. - Diese linearen Abbildungen werden beschrieben durch die Matrizen:

$$\mathbf{A_f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B_g} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

a) Bestätigen Sie durch exemplarische (ausführliche) Berechnung von c_{23}, dass die Produktmatrix $\mathbf{C_{g\circ f}}$, die die Abbildung von **V** nach **Z** beschreibt, folgende Darstellung besitzt:

$$\mathbf{C_{g\circ f}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & \mathbf{3} & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

b) Zeigen Sie durch Bestimmung von $\mathbf{A_f^{-1}}$, dass die Umkehrabbildung $\mathbf{f^{-1}}$ existiert.[1]

Wie groß ist die Dimension: **dim Kern(f)** ?

---

c) Bestimmen Sie den Bildvektor von $\vec{v} := \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}$ unter $\mathbf{g\circ f}$.

---

d) Geben Sie die Menge der Urbilder (in **W**) unter **g** von $\vec{z} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}$ an, d.h. geben Sie die Lösungsmenge $\mathbf{L_i}$ des zugehörigen inhomogenen LGS an!

Wie groß ist aufgrund dieses Ergebnisses die Dimension: **dim Bild(g)** ? - Geben Sie **Bild(g)** an.

---

e) Erläutern Sie aufgrund der bisherigen Ergebnisse ohne Rechnung, welchen Bildvektor $\mathbf{f}(\vec{v}) \in \mathbf{W}$ Sie für den Vektor $\vec{v}$ aus Teil c) erwarten.

Führen Sie eine Kontrollrechnung unter Verwendung von $\mathbf{A_f^{-1}}$ durch.

---

1 Zur Kontrolle: $\mathbf{A_f^{-1}} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) Vervollständigen Sie das vorgegebene Venn- (Mengen-) Diagramm durch Einzeichnen von:

Kern(g∘f) , **Kern(f)** , **Kern(g)** , **Bild(f)** , **Bild(g)** , **Bild(g∘f)**

und kennzeichnen Sie die Zusammengehörigkeit der jeweiligen Vektorräume durch Abbildungspfeile. Tragen Sie auch die jeweilige Dimension der Vektorräume ein.

Nach Dimensionssatz gilt: **dim Kern(f)** + **dim Bild(f)** = 4. - Ist mit 4 die Dimension des Vektorraumes **V** oder des Vektorraumes **W** gemeint ?