Aufgabe 2: **1.Vorschlag**

Nr	Erwartete Teilleistung / Lösung	Hj	AB	BE	er.	Erläuterungen / Kommentar
a)	$V \xrightarrow[A_f]{f} W \xrightarrow[B_g]{g} Z$; $V \cong \mathbb{R}^2$; $W,\ Z \cong \mathbb{R}^3$; Da die Spalten die Bilder der Basisvektoren des jeweiligen Urbildraumes sind, ist V zweidimensional, W und Z sind dreidimensional.	3	I	3		
b)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$	3	I	4		Hier muss auf die richtige Reihenfolge geachtet werden.
c)	Eine Umkehrabbildung kann mur existieren, wenn die Matrix quadratisch ist. Dazu muss Bild(**g**) = **Z** sein, was erfordert, dass die Menge der Spaltenvektoren von **B** linear unabhängig ist. Nachweis der linearen Unabhängigkeit z.B. über das Spatprodukt: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1-6+6-(-3-6+2) = 6 \neq 0.$	3	II	2 5		Es sind natürlich äquivalente Nachweise möglich, z.B. dass sich der Nullvektor in **Z** nur trivial aus den Spaltenvektoren von **B** linear kombinieren läßt, was bedeutet, dass Kern(**g**) $=\{\vec{0}\}$ ist (oder das homogene LGS ist nur trivial lösbar). Insgesamt: Keine Reproduktion.
d)	Es gilt: $\mathbf{B}^* \circ \vec{w}^* = \vec{z}^* = (\mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{T}) \circ \vec{w}^*$ $\begin{array}{ccc} \mathbf{W} & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{T}\uparrow & & \downarrow \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{W}^* & \xrightarrow{\mathbf{B}^*} & \mathbf{Z}^* \end{array}$ Die Matrix **T** verändert im Urbildraum, die Matrix $\mathbf{T}^{-1}$ im Bildraum die Basis (siehe Diagramm). - Oder z.B.: $x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E \Leftrightarrow \mathbf{T} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{E^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E \Leftrightarrow \mathbf{T}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{E^*}$	3	II	5		Die verständige Interpretation der abbildungstheoretischen Auswirkungen einer Basistransformation ist sicherlich Niveau 2. Ob hier von den Schülern ein Diagramm zur Verdeutlichung gewählt wird ist offen. Eine rein textliche Begründung erscheint äquivalent.
e)	$\left.\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \to \ldots \to \left\{\begin{array}{ccc\|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	3	II	5		Die Berechnung einer inversen Matrix ist zeitaufwendig und wird wegen der Komplexität, obwohl es eigentlich nur Gauß-Algorithmus ist, dem Anforderungsbereich 2 zugeordnet.

Aufgabe 2: **1.Vorschlag**

f)	Kontrollrechnungen: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}_E$; $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{E^*}$ $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{E^*} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}_{E^*}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}_{E^*} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}_E$	3	I I	6 6		Auf die Berechnung von $\mathbf{B}^*$ wird aus Zeitgründen verzichtet, die Schüler haben schon hinreichend nachgewiesen, dass sie Matrizen verknüpfen können. Der leichte Aufgabenteil am Ende soll auch lernpsychologisch Selbstvertrauen vor Beginn der 3. Aufgabe vermitteln.
				36		