Gegeben ist die Funktionenschar $\mathbf{f_t}$ mit $\mathbf{f_t}(x) = (x^2 - t) \cdot e^{-x}$; $t \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Schar auf Nullstellen, relative Extrema und Wendepunkte unter besonderer Berücksichtigung zulässiger Parameterwerte.

Hinweis: Es sind stets nur die x-Werte erforderlich, und bei der Untersuchung auf Wendepunkte genügt die Prüfung einer notwendigen Bedingung!

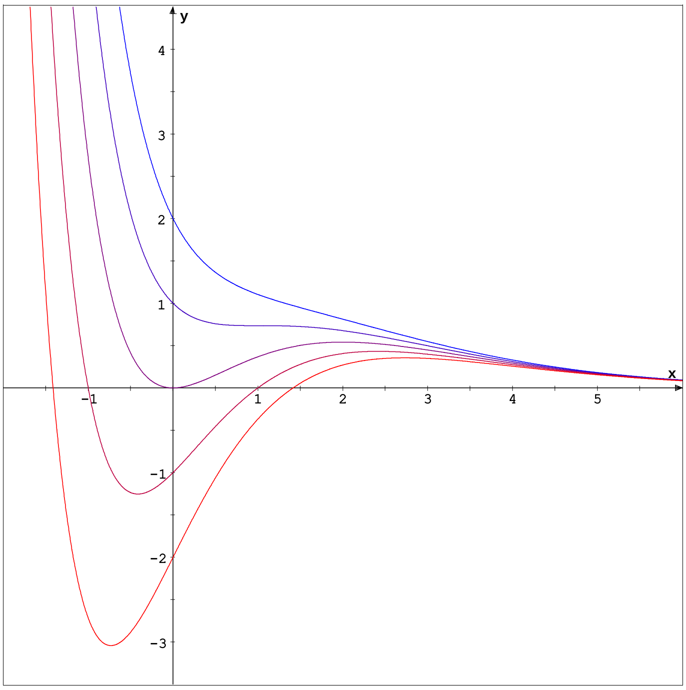
---

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionsgraphen für betragsmäßig wachsende x-Werte.

---

c) Nebenstehend sind Ausschnitte von 5 Graphen der Funktionenschar skizziert.

Ordnen Sie aufgrund der bisherigen Untersuchungsergebnisse den Graphen die zugehörigen 5 Parameter zu.



---

d) Zeigen Sie, dass der Grenzwert:

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a f_t(x)\, dx$$

existiert.

Hinweis: Auf vorherige Ergebnisse kann verwiesen werden!

Welche graphische Bedeutung hat dieser Grenzwert im Fall $t = 2$?

---

e) Die Funktion $\mathbf{f_0}$ soll in einer Umgebung um die Nullstelle durch eine Funktion $\mathbf{p_3}$ mit:

$$\mathbf{p_3}(x) := \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot x^i$$

approximiert werden.

(1) Bestimmen Sie den Term des Taylor-Polynoms und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen im obigen Diagramm.

(2) Berechnen Sie den prozentualen Fehler $\left| \frac{\mathbf{p_3}(-1) - \mathbf{f_0}(-1)}{\mathbf{f_0}(-1)} \right|$ der Approximation an der Stelle -1.

Erläutern Sie kurz (prinzipiell) Ihre mögliche Vorgehensweise, wenn $\mathbf{f_0}$ in der Nähe von -1 besser approximiert werden soll und zwar einerseits unter Beibehaltung, andererseits durch Veränderung des Grades der ganzrationalen Funktion.
