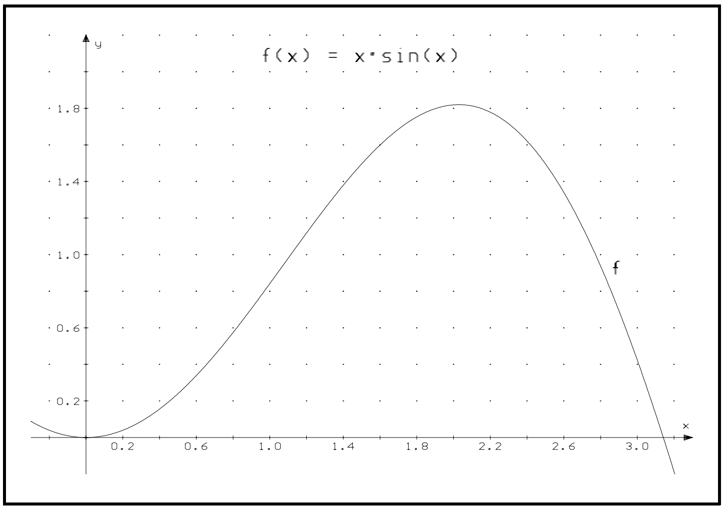
Aufgabe 3 (30,6 % der erwarteten Leistung) **1. Vorschlag**

Betrachtet wird die ausschnittsweise skizzierte Funktion **f** mit $\mathbf{f}(x) = x \cdot \sin(x)$ über dem Intervall $\mathbf{I} = [\,0\,;\,\pi\,]$.



a) Der Graph der Funktion **f** schließt über **I** mit der x-Achse eine Fläche **A** ein. Diese Fläche **A** soll durch eine senkrechte Gerade mit der Gleichung x = a halbiert werden. Zeigen Sie, dass die Problemstellung auf die Lösung der folgenden Gleichung führt.

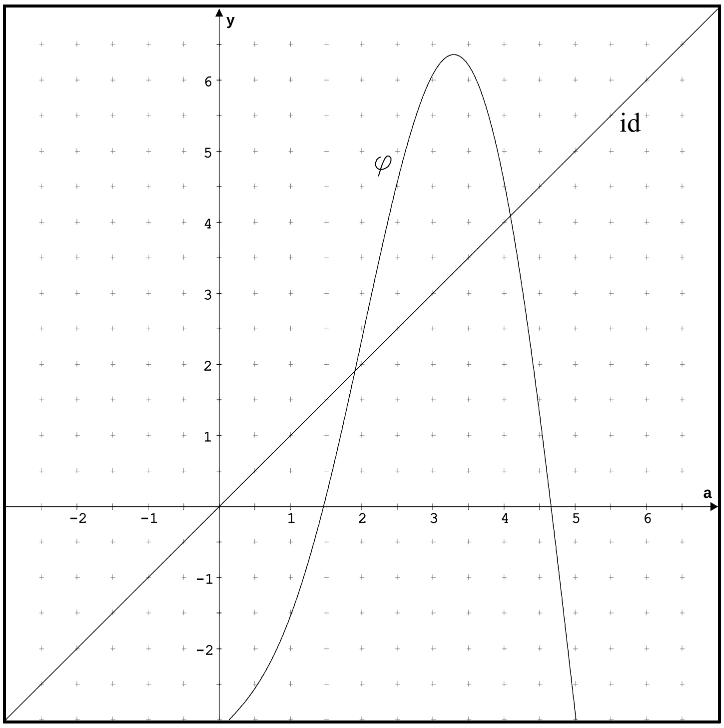
$$\boxed{2 \cdot \sin(a) \;-\; 2 \cdot a \cdot \cos(a) \;-\; \pi \;=\; 0}$$

b) Durch Addition von a auf beiden Seiten der obigen Gleichung wird die Lösung der Problemstellung als Fixpunktproblem: $a = \varphi(a)$ der Iterationsfunktion φ mit:

$$\varphi(a) \;:=\; 2 \cdot \sin(a) - 2 \cdot a \cdot \cos(a) - \pi + a$$

interpretiert.

Zeigen Sie unter Verwendung der nebenstehenden Skizze auf <u>graphischem</u> Wege mit dem Anfangswert $\mathbf{a_0 = 2}$, und begründen Sie <u>rechnerisch</u> unter Verwendung geeigneter Kriterien, dass die Iterationsfunktion φ zur Lösung des Problems ungeeignet ist.



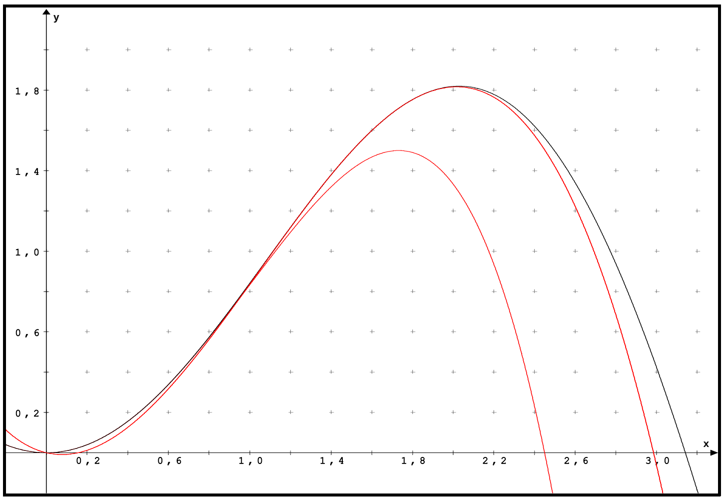
c) Begründen Sie, dass das Konvergenzverhalten einer Iterationsfunktion durch Subtraktion einer linearen Funktion verbessert werden kann, d.h. es wird aus der Fixpunktbedingung eine neue Iterationsfunktion Φ abgeleitet:

$$a \;=\; \varphi(a) \quad\Leftrightarrow\quad a - k \cdot a \;=\; \varphi(a) - k \cdot a \quad\Rightarrow\quad \Phi(a) \;:=\; \frac{\varphi(a) \;-\; k \cdot a}{1 \;-\; k}$$

Geben Sie eine geeignete Größe von **k** an. - Bestimmen Sie danach konkret mit der Iterationsfunktion Φ den Wert von $\mathbf{a_1}$ aus dem Anfangswert $\mathbf{a_0 = 2}$. [1]

[1] Erwartete Taschenrechnergenauigkeit: 4 Nachkommastellen.

d) Die Funktion **f** soll nun durch eine ganzrationale Funktion approximiert werden.



– Bestimmen Sie zunächst die Terme der ersten 4 Ableitungsfunktionen von **f**.

– Bestimmen Sie den Term $\mathbf{p_1}(x)$, den Term der **4**. Partialsumme der Reihenentwicklung um die Stelle $\mathbf{x_0 = 0}$.

– Bestimmen Sie den Term $\mathbf{p_2}(x)$, den Term der **3**. Partialsumme der Reihenentwicklung um die Stelle $\mathbf{x_0} = \frac{\pi}{2}$.

– Nebenstehend skizziert sind Ausschnitte der Graphen von **f**, $\mathbf{p_1}$ und $\mathbf{p_2}$. Ordnen Sie (im rechten Ausschnitt und in der Nähe des Ursprungs) begründet die Graphen den Funktionsnamen zu.