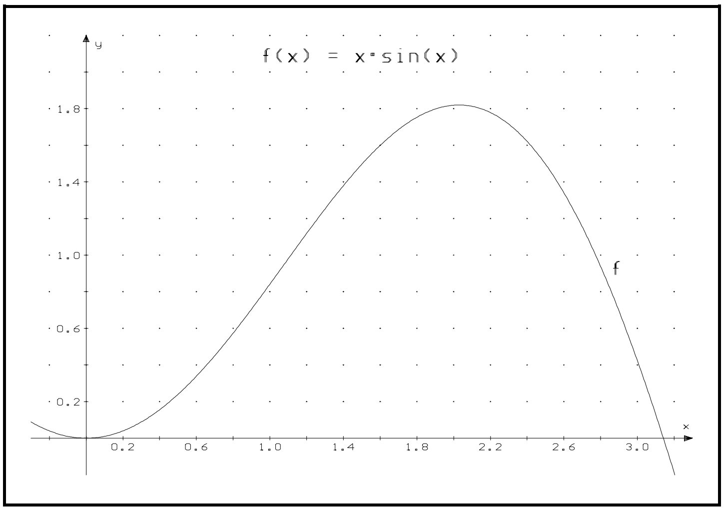
Aufgabe 3 (40% der erwarteten Leistung) **1. Vorschlag**

Betrachtet wird die ausschnittsweise skizzierte Funktion **f** mit $\mathbf{f}(x) = x \cdot \sin(x)$ über dem Intervall $\mathbf{I} = [\,0\,;\,\pi\,]$.



---

a) Geben Sie die Funktionsterme von $\mathbf{f}'$, $\mathbf{f}''$, und $\mathbf{f}'''$ an!
Geben Sie danach durch Überprüfung von hinreichenden Bedingungen näherungsweise die Koordinaten des relativen Maximums $\mathbf{M}(\,\mathbf{x_M} \mid \mathbf{y_M}\,)$ und die Koordinaten des Wendepunktes $\mathbf{W}(\,\mathbf{x_W} \mid \mathbf{y_W}\,)$ an.
Nehmen Sie als Näherungswert für die Wendepunktstelle $\mathbf{x_W} := 1{,}0769$ und führen Sie zur Bestimmung von $\mathbf{x_M}$ *einen* Iterationsschritt mit dem *Newton* - Verfahren durch. Wählen Sie als Anfangswert $\mathbf{x_{M1}}$ für $\mathbf{x_M}$: $\mathbf{x_{M1}} := 2$ und runden Sie das Ergebnis für $\mathbf{x_{M2}}$ auf **4** Nachkommastellen!

---

b) Bestimmt werden soll nun der 'Schwerpunkt' $\mathbf{S}(\,\mathbf{x_S} \mid \mathbf{y_S}\,)$ der Fläche, den der Graph von **f** mit der x-Achse über **I** einschließt, nach den Guldinschen Regeln.

(1) Bestimmen Sie zunächst den Flächeninhalt **A** der oben benannten Fläche!

(2) Erläutern Sie kurz die nebenstehende Beziehung zur Bestimmung der Größe des Rotationsvolumens um die y-Achse nach der Zylinder<u>schalen</u>methode. Berechnen Sie danach $\mathbf{V_y}$ mit partieller Integration!

$$\mathbf{V_y} = \int_0^{\pi} 2\pi x \cdot [\,x \cdot \sin(x)\,]\,dx$$

(3) Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Größe des Rotationsvolumens um die x-Achse nach dem *Simpson* - Verfahren.
Teilen Sie **I** dazu in **6** Teilintervalle und geben Sie den Näherungswert für $\mathbf{V_x}$ mit einer Taschenrechnergenauigkeit von **4** Nachkommastellen an!

$$\mathbf{V_x} = \int_0^{\pi} \pi \cdot [\,x \cdot \sin(x)\,]^2\,dx$$

(4) Berechnen Sie nun die Koordinaten von **S** im Rahmen der möglichen Genauigkeit und überprüfen Sie ihr Ergebnis durch Eintrag von **S** in die obige Graphik.

---

c) Die Größe des Rotationsvolumens um die y-Achse $(\mathbf{V_y})$ ließe sich prinzipiell auch nach der Zylinder<u>scheiben</u>methode bestimmen. Äußern Sie sich kurz zu den Problemen, die diese Strategie in diesem Fall schwieriger und weniger geeignet erscheinen läßt.
