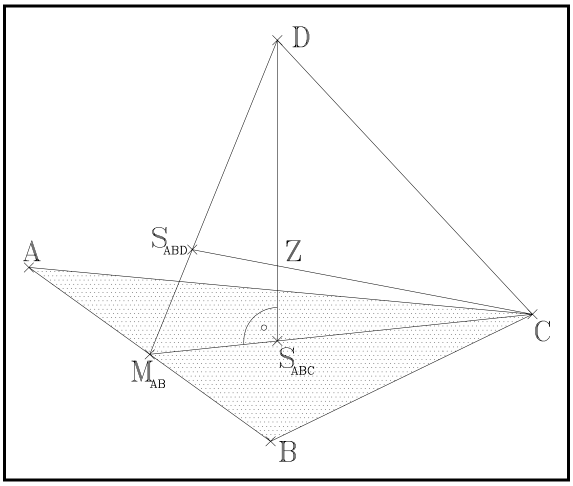
Aufgabe 1 (38,2% der erwarteten Leistung) **2. Vorschlag**

In einem dreidimensionalen affinen Raum mit zugehörigem Vektorraum sind folgende Punkte gegeben:

A(3|-2|4); **B**(-1|1|-1); **C**(2|5|4); **D**(6|2|-1)



a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $\mathbf{S_{ABC}}$ der Seitenhalbierenden im Dreieck $\triangle ABC$. - Sie dürfen den bekannten Satz benutzen: "Die Seitenhalbierenden teilen sich im Verhältnis 1:2 ."

(Ergebnis: $\mathbf{S_{ABC}}\left(\frac{4}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|\frac{7}{3}\right)$)

b) Geben Sie Ebenengleichungen für die Ebene $\mathbf{e_{ABC}}$ in Parameterform und in Normalenform an. Zeigen Sie, dass $\mathbf{S_{ABC}}$ Lotfußpunkt der Höhe der durch die 4 Punkte definierten Pyramide (mit **D** als Spitze) ist.

c) Es gilt: $\mathbf{S_{ABD}}\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{1}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt **Z** der räumlichen Schwerelinien $\mathbf{S_{ABD}C}$ und $\mathbf{S_{ABC}D}$.
Berechnen Sie unter Verwendung der Hesseschen Normalenform den Abstand des Punktes **Z** zur Ebene $\mathbf{e_{ABC}}$.
Bestimmen Sie am Beispiel $\mathbf{S_{ABC}D}$ das Teilungsverhältnis von Schwerelinien einer dreieckigen Pyramide. (Zwischenergebnis: $\mathbf{Z}\left(\frac{5}{2}\middle|\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2}\right)$)

d) Geben Sie eine Gleichung der Kugel **k** mit dem Mittelpunkt **Z** und dem Radius $\mathbf{r} = \mathbf{S_{ABC}Z}$ an!
Zeigen Sie, dass die Gerade $\mathbf{g}(D;M_{AB})$ die Kugel **k** nur berührt und dass $\mathbf{S_{ABD}}$ der Berührpunkt ist.
Folgt aus dem Obigen eindeutig, dass die Ebene $\mathbf{e_{ABD}}$ Tangentialebene der Kugel **k** ist?

e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Polarebene $\mathbf{e_D}$ zum Pol **D** bezüglich der Kugel **k**. - Die Polarebene $\mathbf{e_D}$ schneidet aus der Kugel **k** einen Kreis $\mathbf{k_D}$ aus ($\mathbf{k_D} := \mathbf{k} \cap \mathbf{e_D}$). Geben Sie den Mittelpunkt und die Größe des Radius dieses Schnittkreises $\mathbf{k_D}$ an!