Gegeben ist eine lineare Abbildung **f** zwischen den Vektorräumen V und W.

Es gelte: $V,\ W \cong \mathbb{R}^3$; $f(V) \subset W$; $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$; $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-4\\-3\\-2\end{pmatrix}$.

Außerdem sind folgende Vektoren gegeben: $\vec{w}_1 := \begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix} \in W$; $\vec{w}_2 := \begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix} \in W$.

---

a) Bestimmen Sie den **Kern(f)**, indem Sie das zugehörige homogene Gleichungssystem $\mathbf{S_h}$ aufstellen und dieses mit Hilfe des Gauß-Verfahrens lösen.
Überprüfen Sie das Ergebnis durch Anwendung der zu **f** gehörenden Matrix $\mathbf{A_f}$ auf den allgemeinen Vektor aus **Kern(f)**.

---

b) Geben Sie eine Basis von **Bild(f)** an und bestätigen Sie den allgemeinen Zusammenhang zwischen der Dimension: **dim** $\mathbf{L_h}$ und dem Rang: **Rg** $\mathbf{S_h}$.

---

c) Begründen Sie, warum das durch die Abbildungsgleichung $\mathbf{f(\vec{v}) = \vec{w}}$ beschriebene inhomogene Gleichungssystem $\mathbf{S_i}$ für den oben definierten 1.Vektor ($\vec{\mathbf{w}}_1$) aus W lösbar ist, für den 2.Vektor ($\vec{\mathbf{w}}_2$) jedoch nicht. Führen Sie den Nachweis!

Geben Sie danach für den lösbaren Fall ($\mathbf{f(\vec{v}) = \vec{w}_1}$) die Lösungsmenge $\mathbf{L_i}$ an.

---

d) Beweisen Sie: (1) $\mathbf{L_h}$ ist ein Vektorraum (Unterraum), (2) $\mathbf{L_i}$ jedoch nicht.
Zeigen Sie dazu: (1) $\mathbf{L_h}$ ist bezüglich der üblichen Addition und äußeren Multiplikation mit reellen Zahlen abgeschlossen, (2) $\mathbf{L_i}$ nicht (Gegenbeispiel).

---

e) Die Lösungsmengen der <u>einzelnen</u> Gleichungen des Systems $\mathbf{S_h}$ können als geometrische Objekte aufgefasst werden. Welche geometrischen Objekte beschreiben diese 3 Lösungsmengen? Formulieren Sie eine Aussage bezüglich der geometrischen Lage dieser 3 Objekte zueinander aufgrund Ihrer obigen Untersuchungen.
Was bedeutet, geometrisch hinsichtlich der Lagebeziehung, die Veränderung beim Übergang von $\mathbf{S_h}$ zu $\mathbf{S_i}$ (lösbarer Fall), d.h. wie könnte man die Lösungsmengen $\mathbf{L_h}$ und $\mathbf{L_i}$ (Teil d)) geometrisch interpretieren?
