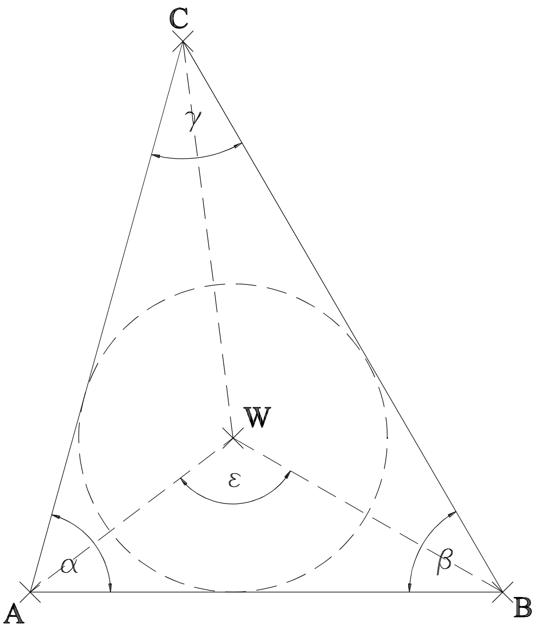
Kreis und Winkel II

Wir zeichnen den Innenkreis eines Dreiecks

Zeichnet man den Außenkreis eines Dreiecks um den Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten der Seiten, so ist uns bekannt, dass der Winkel am Umfang des Kreises stets halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel ist.



Gibt es auch einen Zusammenhang, wenn man statt des Außenkreises den Innenkreis eines Dreiecks betrachtet, den man bekanntlich um den Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden zeichnet.

Das wollen wir untersuchen!

<u>Aufgabe:</u>

Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck (aber bitte nicht zu klein und nicht gleichschenklig) und konstruiere den Mittelpunkt W des Innenkreises.

Verbinde W mit den Eckpunkten des Dreiecks und kennzeichne die Winkel mit Scheitelpunkt W geeignet. Deine Zeichnung könnte etwa so aussehen wie die oben stehende Skizze, wobei für die beiden noch nicht gekennzeichneten Winkel eventuell die griechischen Buchstaben φ und ω in Frage kommen.

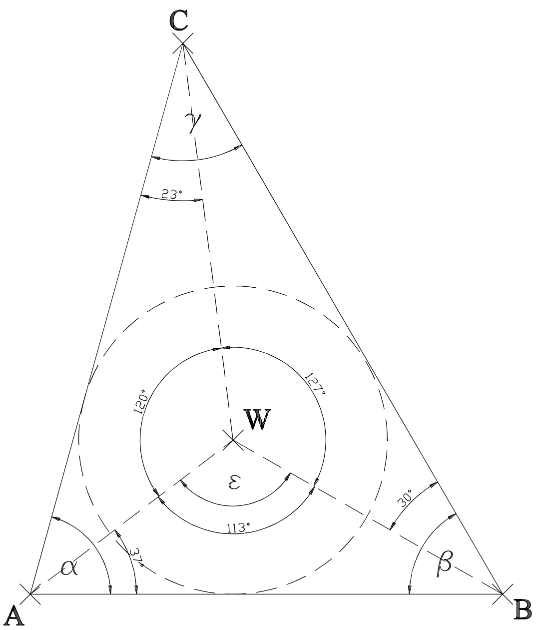
Miss nun alle 6 gekennzeichneten Winkel und vergleiche mit den Ergebnissen der Nachbarn. - Schon etwas entdeckt?

$\overline{\alpha} \approx$ $\overline{\beta} \approx$ $\overline{\gamma} \approx$ $\overline{\varepsilon} \approx$ $\overline{\varphi} \approx$ $\overline{\omega} \approx$

Bei meinem Beispieldreieck sieht es so aus, dass gilt:

(✳)

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\varepsilon} &= 90^\circ + \frac{\overline{\gamma}}{2} \\ \overline{\varphi} &= 90^\circ + \frac{\overline{\alpha}}{2} \\ \overline{\omega} &= 90^\circ + \frac{\overline{\beta}}{2} \end{aligned}}$$



Das hat sicher etwas damit zu tun, dass W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist.

<u>Aufgabe:</u>

Verwende den Winkelsummensatz im Dreieck ΔABC und in den Dreiecken ΔABW, ΔBCW und ΔCAW und beweise die Beziehungen (✳) durch geeignete Gleichsetzung von Termen.

Kreis und Winkel II

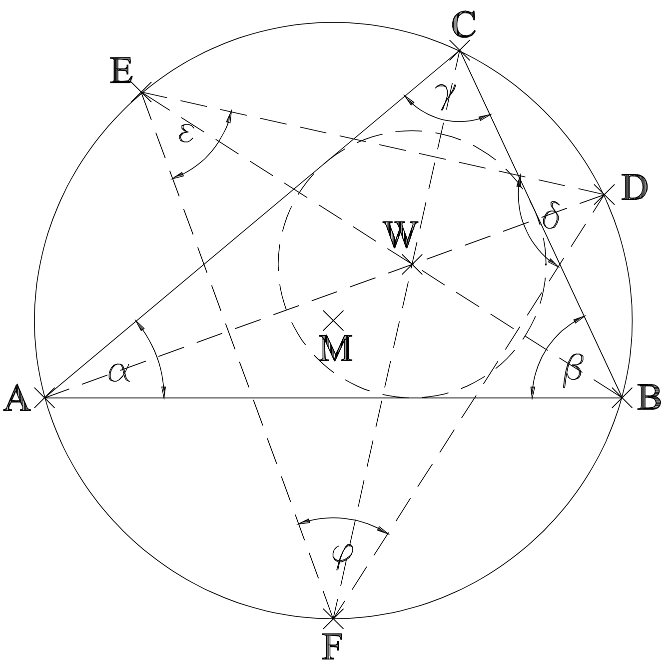
Wir zeichnen den Innenkreis eines Dreiecks

Wir wollen nun Außen- und Innenkreis eines Dreiecks ΔABC konstruieren.

Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck (aber bitte nicht zu klein und nicht gleichschenklig) und konstruiere den Mittelpunkt W des Innenkreises und den Mittelpunkt M des Außenkreises.

Zeichne nun Geraden durch W und die jeweiligen Eckpunkte A, B und C deines Dreiecks. Diese 3 Geraden schneiden den Außenkreis in 3 neuen Punkten D, E und F, die ein Dreieck ΔDEF definieren.

Deine Zeichnung könnte ungefähr so aussehen wie die nebenstehende Skizze, wenn du auch die Winkel geeignet bezeichnest.



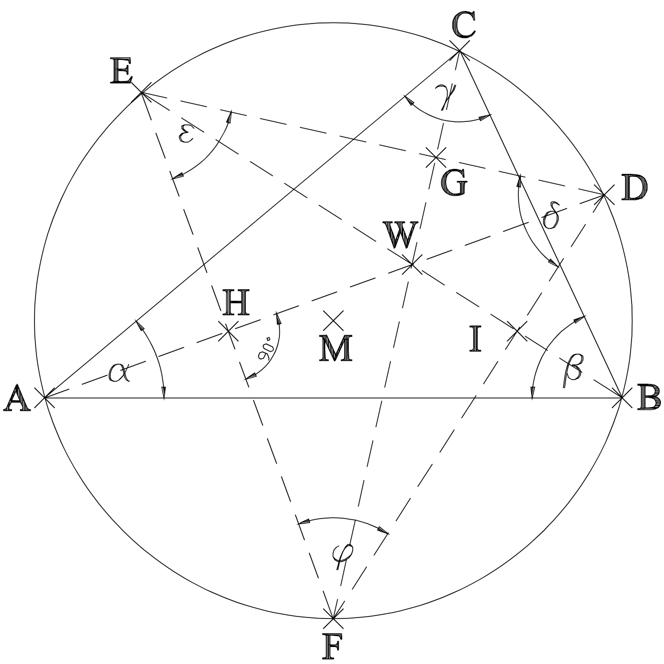
<u>Aufgabe:</u>

Untersuche die Gesamtfigur auf Besonderheiten. Vergleiche mit den Ergebnissen der Nachbarn. - Schon etwas entdeckt?

....

Bei meinem Beispieldreieck sieht es so aus, dass gilt:

$$\overline{\sphericalangle FHW} = 90^\circ \quad \wedge \quad \overline{AH} = \overline{HW}$$
$$\overline{\sphericalangle DIW} = 90^\circ \quad \wedge \quad \overline{BI} = \overline{IW}$$
$$\overline{\sphericalangle EGW} = 90^\circ \quad \wedge \quad \overline{CG} = \overline{GW}$$



Das ist sicher gar nicht so leicht zu beweisen.

Hat jemand in der Klasse ein stumpfwinkliges Dreieck gezeichnet? - Ist es da auch so?

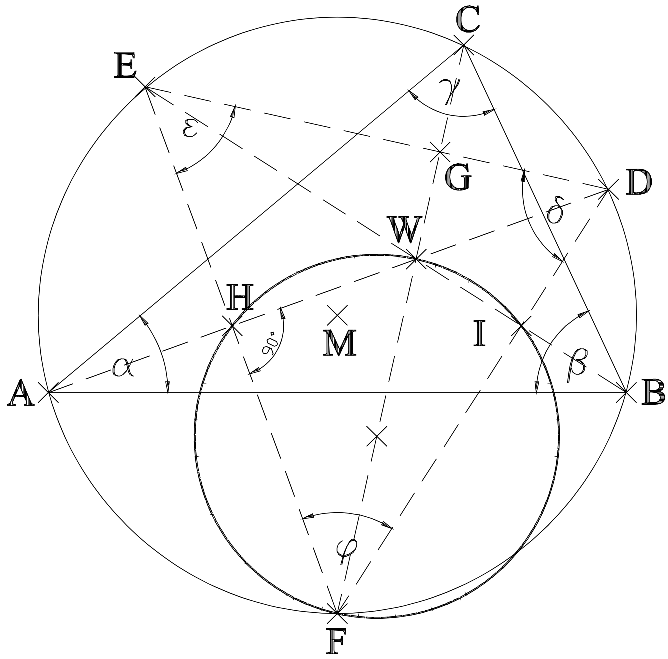
Wenn niemand diesen Fall untersucht hat, so fertige eine entsprechende Konstruktion als Hausaufgabe an.

Schreibe nun auf, was du über Winkelgrößen in dieser Figur sicher aussagen kannst. Ergänze die Skizze eventuell mit geeigneten Bezeichnungen; verwende Farben für gleiche Winkelmaße.

....

Kreis und Winkel II

Wir zeichnen den Innenkreis eines Dreiecks

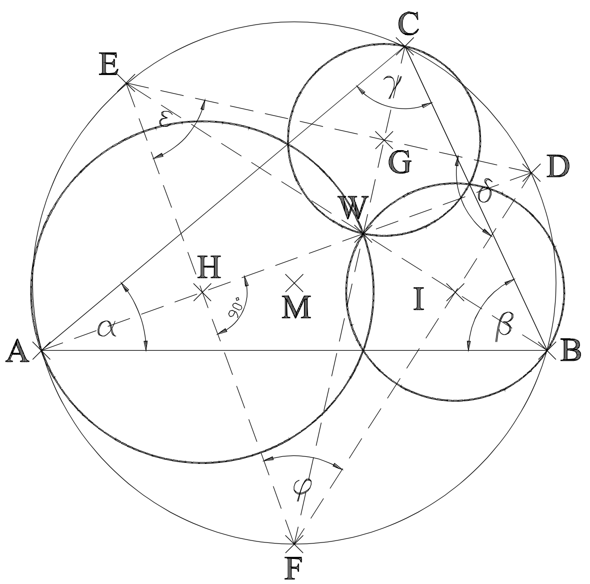


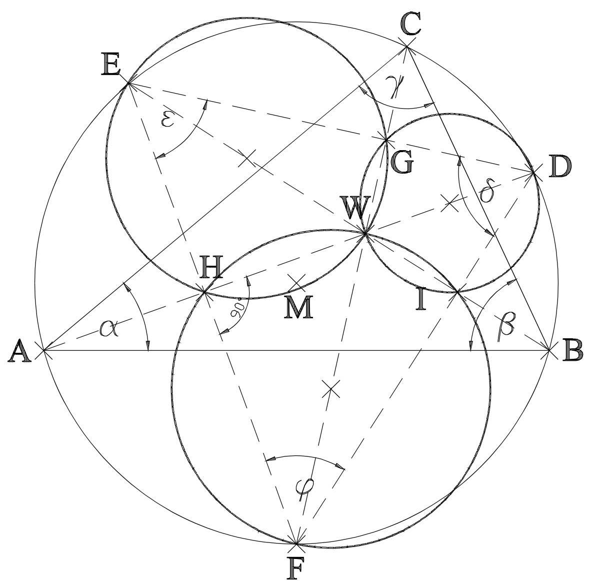
Aufgaben:

Konstruiere einen Kreis mit FW als Durchmesser. Überprüfe, ob dieser Kreis durch die Punkte H und I verläuft.

Begründe:
Wenn man die konstruktive Eigenschaft, dass H und I auf einem Kreis mit Durchmesser FW liegen, als Tatsache akzeptiert [1], so folgt daraus sicher, dass das Viereck □FIWH in den Eckpunkten I und H rechtwinklig ist.

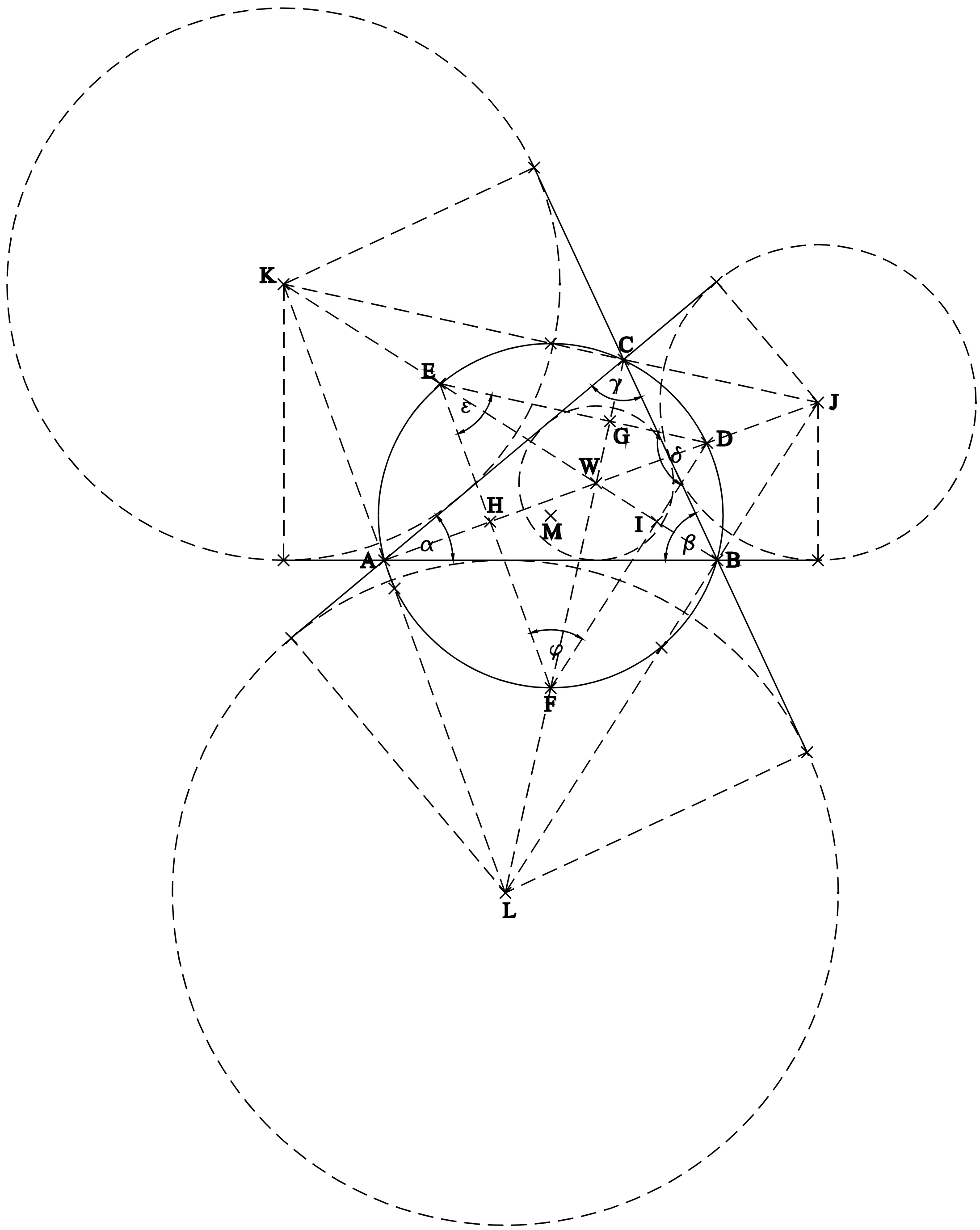
Bestimme die Maße der Winkel φ, δ und ε in Abhängigkeit von den Maßen von α, β und γ.





1 Das ist kein Beweis!

Nachtrag für besonders Interessierte:



Um den Beweis vollständig führen zu können, müssten wir uns mit der oben skizzierten Ankreisfigur, und dem Dreieck, gebildet aus den Mittelpunkten J, K und L der 3 Ankreise beschäftigen. Wenn wir das später noch tun, dann erinnere dich an die vorherigen Aufgaben.