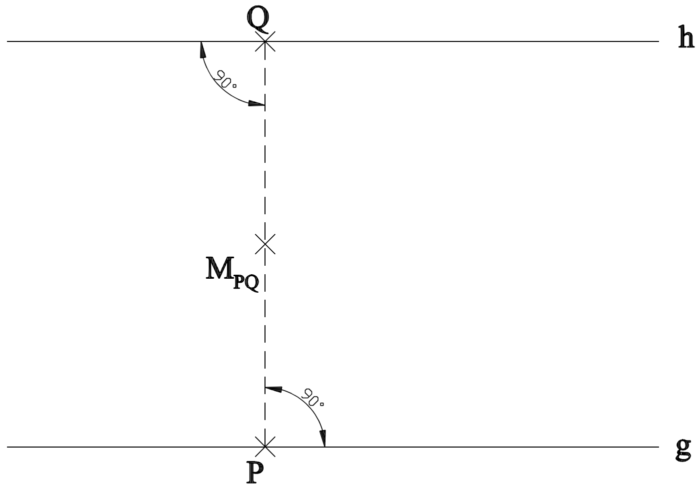
Die Mittelparallele

... oder: Was ist der Mittelpunkt eines Dreiecks?

1) Konstruiere in deinem Heft zwei parallele Geraden **g** und **h** mit einem Abstand $\overline{PQ}$ = 8 cm nur mit Zirkel und Lineal.
Erinnere dich an die Grunddefinition von Parallelität: " ..... wenn es eine gemeinsame Senkrechte gibt".

Konstruiere nun die Mittelparallele **m** der beiden Geraden, d.h. eine zu beiden Geraden **g** und **h** parallele Gerade, die durch den Mittelpunkt $\mathbf{M_{PQ}}$ der Strecke PQ verläuft.

Die Eigenschaft dieser Mittelparallelen **m** (mit möglichen Folgerungen) wollen wir im weiteren untersuchen.



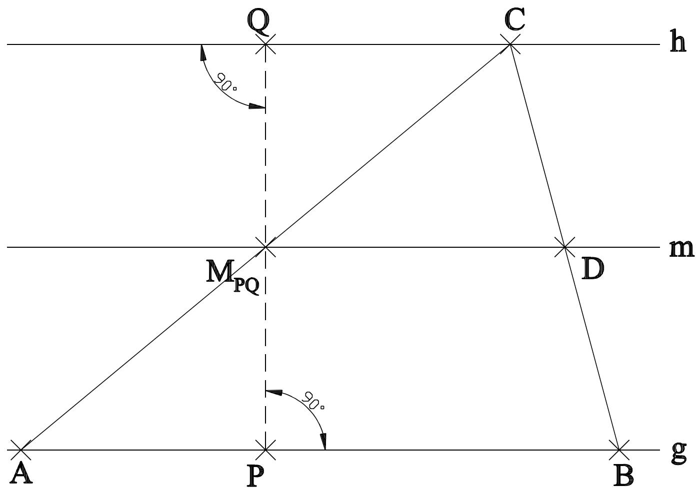
---

2) Wähle auf der Geraden **g** einen Punkt **A** und zeichne die Gerade **g**(A,M_{PQ}). Benenne $\{\mathbf{C}\} := \mathbf{g}(A,M_{PQ}) \cap \mathbf{h}$

<u>Beweise:</u> $\mathbf{M_{PQ}} = \mathbf{M_{AC}}$, d.h. $\mathbf{M_{PQ}}$ ist auch Mittelpunkt der Strecke **AC**.
<u>Tipp:</u> Kongruenzsatz WSW

Gilt diese "Mittelpunktseigenschaft" auch für andere Strecken "zwischen" **g** und **h** ?

3) Zeichne eine weitere Gerade **j** durch Punkt **C**, welche die Gerade **g** im Punkt **B** schneiden soll.



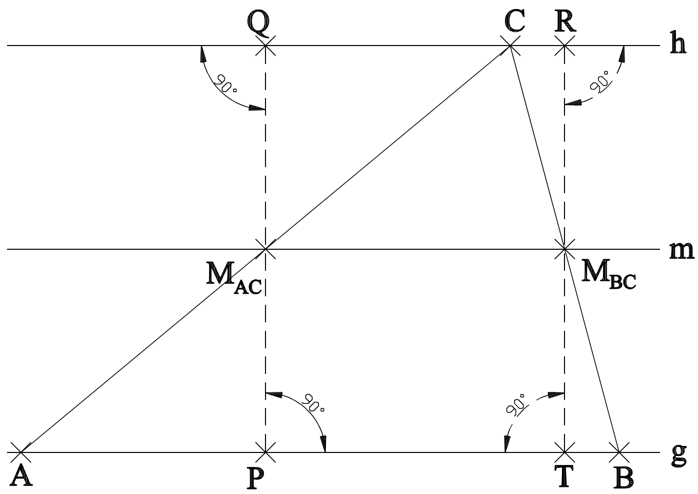
<u>Beweise</u>: Es gilt: $\mathbf{D} = \mathbf{M_{CB}}$, wobei $\{\mathbf{D}\} := \mathbf{j} \cap \mathbf{m}$, d.h. die Mittelparallele teilt auch diese Strecke "zwischen" **g** und **h**.

Du bist sicherlich bei Aufgabe 3) selber auf die Idee gekommen, eine Senkrechte zu **g** (und **h**) durch den Punkt **D** zu zeichnen, womit sich die Mittelpunktseigenschaft von **D** wiederum mit dem Kongruenzsatz WSW begründen läßt.

4) <u>Beweise:</u> $\overline{M_{AC}M_{BC}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$, d.h.:

die Länge der Strecke, welche die Mittelparallele aus dem Dreieck ΔABC "herausschneidet" ist halb so lang wie die Grundseite des Dreiecks. - Außerdem gilt:

$$\mathbf{A_\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{h_c}$$



Die Mittelparallele

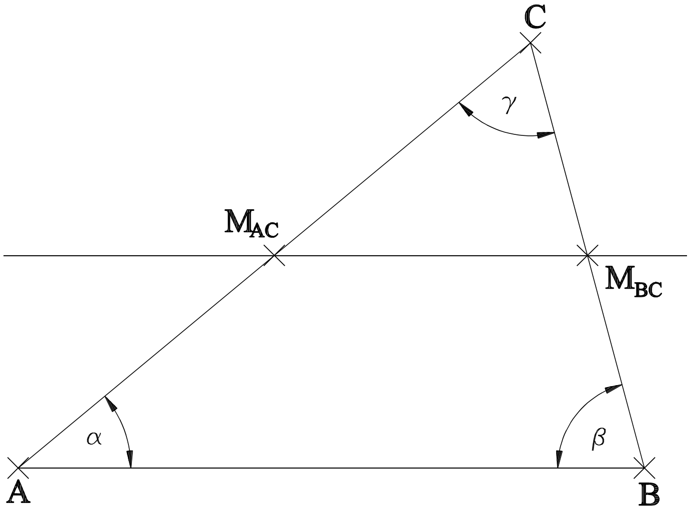
... oder: Was ist der Mittelpunkt eines Dreiecks?

Wir wollen zunächst einmal anwenden, was wir bisher entdeckt und gelernt haben.

5) Zeichne in dein Heft ein neues, beliebiges Dreieck. Konstruiere die beiden Mittelpunkte der Schenkel und zeichne eine Gerade durch diese beiden Mittelpunkte.

   a) Bestimme den Flächeninhalt $\mathbf{A}_\Delta$ deines Dreiecks. Zeichne dazu geeignete Hilfslinien ein und miss benötigte Streckenlängen möglichst genau.

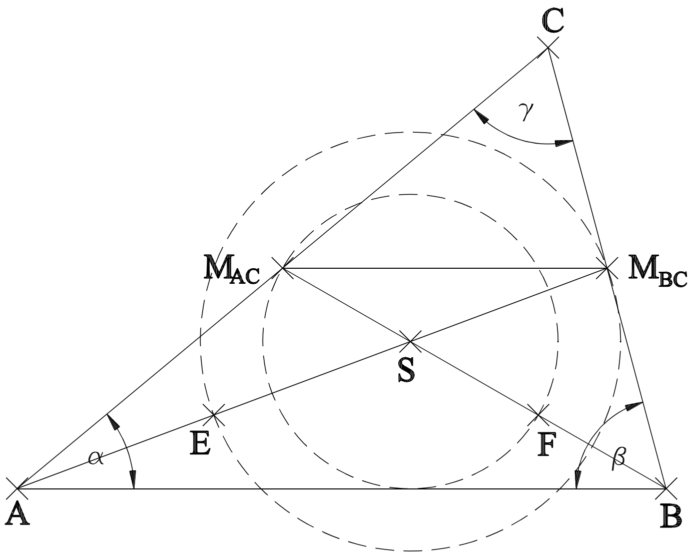
   b) <u>Begründe:</u> $g(M_{AC}, M_{BC}) \parallel AB$



Der Satz über die Mittelparallele (als Strecke) im Dreieck: "Wenn man die Mittelpunkte zweier Schenkel eines Dreiecks verbindet, dann ist diese Strecke parallel zur Grundseite und halb so lang wie diese."

Wofür kann man denn diesen Satz verwenden?

6) Zeichne in dein Dreieck die beiden Seitenhalbierenden $\mathbf{s_a}$ und $\mathbf{s_b}$ ein, die sich im Punkt **S** schneiden. Konstruiere nun die Punkte **E** und **F**, wie nebenstehend skizziert. Analysiere nun die Figur auf Besonderheiten (z.B. die Lage von **E**, **F**, Winkelgrößen, Streckenlängen, ...). Vergleiche mit den Untersuchungen deiner Nachbarn.



---

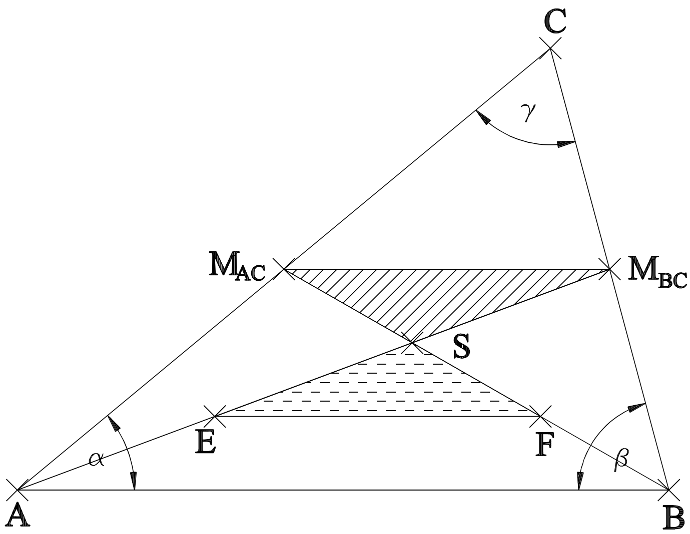
7) <u>Beweise:</u>

   a) $\Delta EFS \cong \Delta M_{BC}M_{AC}S$
   <u>Tipp:</u> Kongruenzsatz SWS

   b) $EF \parallel M_{AC}M_{BC}$
   <u>Tipp:</u> Umkehrung des Wechselwinkelsatzes
   $EF \parallel AB \ \wedge \ \overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$

   c) $E = M_{AS} \ \wedge F = M_{SB}$

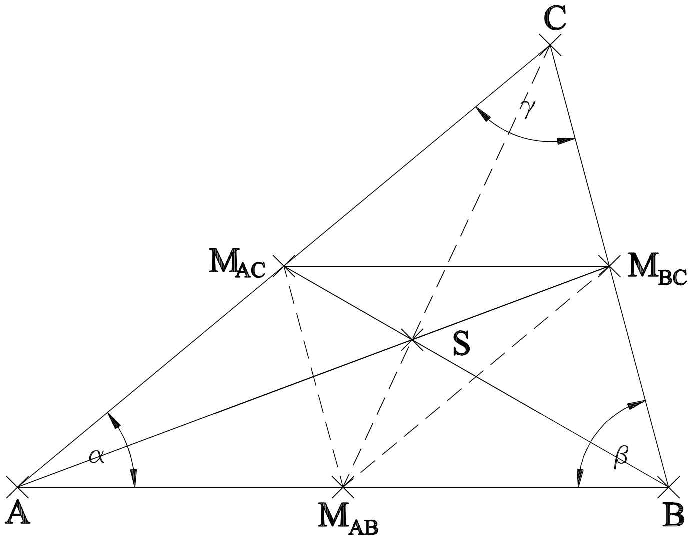
$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{AS} : \overline{SM_{BC}} = 2 : 1 \\ \overline{BS} : \overline{SM_{AC}} = 2 : 1 \end{array}}$$



---

8) <u>Begründe:</u> Auch die Seitenhalbierende $\mathbf{s_c}$ verläuft durch den Punkt **S**, der auch diese Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1 teilt.

<u>Tipp:</u> Stelle dir das Dreieck gedreht, mit anderer Grundseite vor. Erkennst du wieder Mittelparallelen?



....

<u>Hausaufgabe:</u>

Schneide aus einem Stück Karton, z.B. der Unterseite eines DIN-A4-Blocks, ein möglichst großes Dreieck aus (aber bitte keinen Spezialfall eines gleichschenkligen Dreiecks).

Mit einer Nähnadel (oder der Zirkelspitze) fertige 3 kleine Löcher durch dein Pappdreieck in der Nähe der Ecken an, so dass du es mit einer Stecknadel durch ein solches (Eck-) Loch wie ein bewegliches Pendel an einer Pinnwand aufhängen kannst. - Lass dein Dreieckspendel zur Ruhe kommen.

Bastele dir ein Lot aus einem Stück Schnur mit angehängter Masse (z.B. der Schere) und halte den Anfangspunkt deines Lotes an den Aufhängepunkt deines Dreieckspendels, die Stecknadel. Kennzeichne den Punkt, wo das Lot die Dreiecksseite trifft, die dem Aufhängepunkt gegenüber liegt. Verfahre so für alle 3 Eckpunkte bzw. (Eck-) Löcher.

Verbinde danach zeichnerisch die jeweiligen Eckpunkte des Dreiecks mit den Punkten, wo das Lot die gegenüberliegen Seite “geschnitten” hat. - Wenn Du sauber experimentiert hast, sollten diese 3 Linien durch einen Punkt **S** gehen. - Versuche, ob dein Dreieck im Gleichgewicht bleibt, wenn du es im Punkt **S** (senkrecht) auf eine Zirkelspitze legst!? - Verstehst Du, warum man den Schnittpunkt **S** der Seitenhalbierenden eines Dreieckes auch Schwerpunkt des Dreiecks nennt?

<u>Nachtrag:</u> Was ist denn nun der **Mittelpunkt** eines Dreiecks?

– Der Punkt **S**, der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, der gleichgewichtsmäßig “mittelt”? - Aber da ist man doch von den Eckpunkten doppelt so weit entfernt wie von den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten!

– Der Punkt **M**, der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, weil man da gleich weit von den 3 Eckpunkten entfernt ist? - Aber dieser Punkt **M** kann (im Fall eines stumpfwinkligen Dreiecks) sogar außerhalb des Dreiecks liegen!

– Der Punkt **W**, der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, weil man da gleich weit von allen 3 Seiten entfernt ist? - Aber dieser Punkt **W** kann sehr unterschiedlich weit von den Eckpunkten entfernt sein und gleichgewichtsmäßig bleibt dabei i.a. nichts “im Lot”!

– Der Punkt **H**, der Schnittpunkt der Höhen, der die Abstände der Eckpunkte zu den gegenüberliegenden Seiten berücksichtigt? - Aber auch dieser Punkt **H** kann (wie **M**) außerhalb eines Dreieckes liegen!

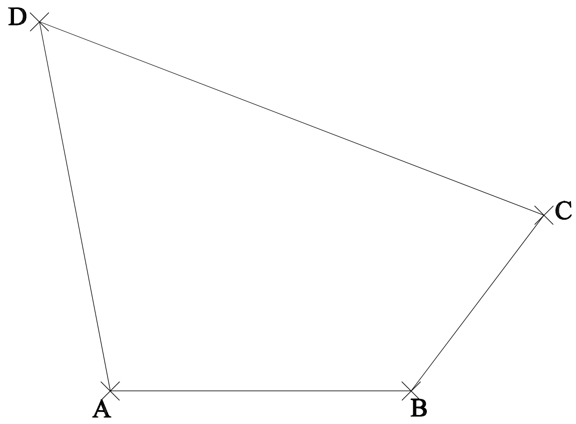
<u>Fazit:</u> <u>Den</u> **Mittelpunkt** eines Dreiecks gibt es nicht!!
(Aber wenn das Dreieck gleichseitig ist, dann ....)

Die Mittelparallele

... oder: Was ist der Mittelpunkt eines Dreiecks?

<u>Nachtrag (Hausaufgabe):</u>

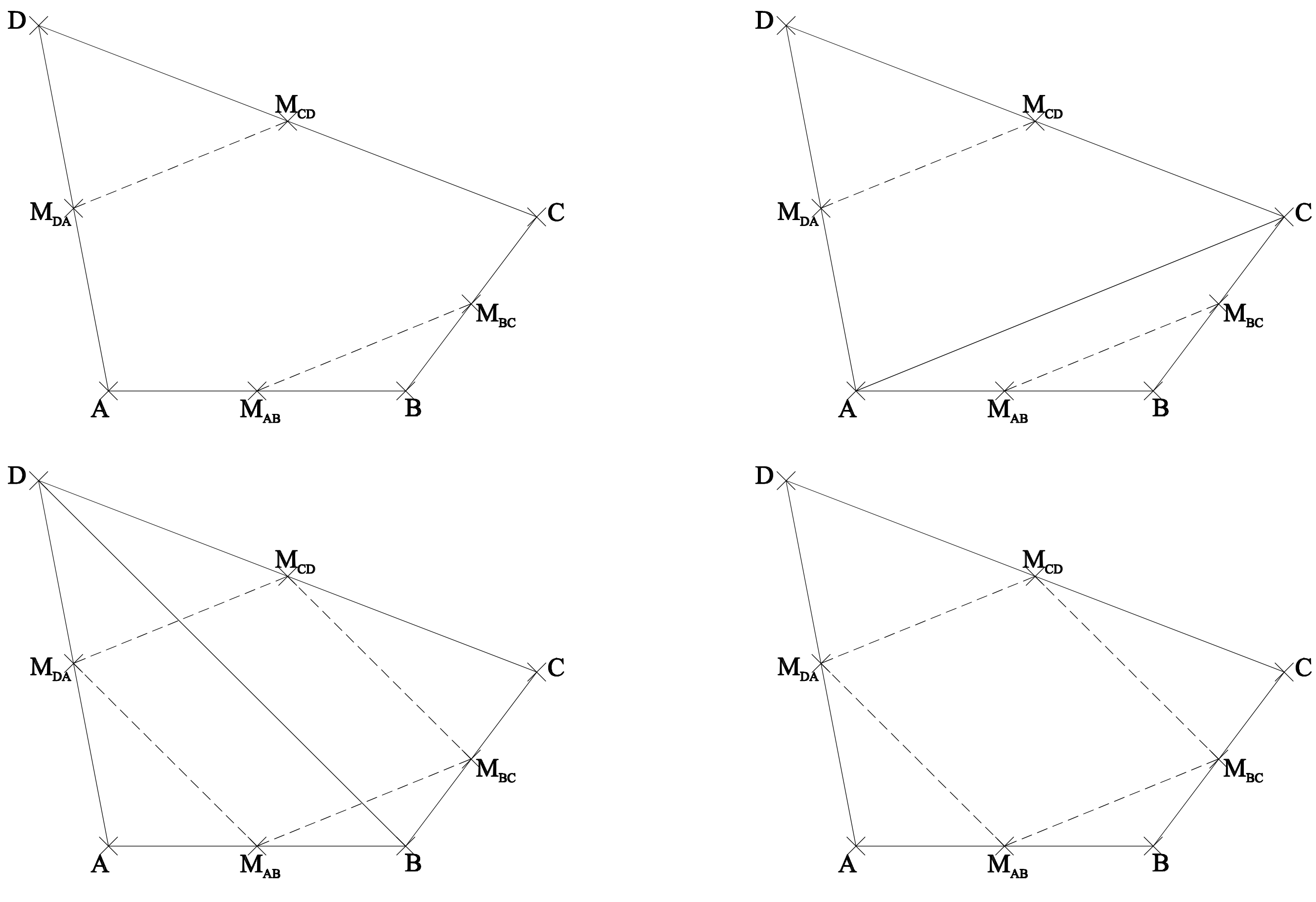
Zeichne in Dein Heft ein beliebiges (konvexes) Viereck, etwa so wie nebenstehend.



Da man ein Viereck ja sicher über eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen kann, so kann man den Satz über die Mittelparallele sicher auch im Fall eines Viereckes anwenden.

Doch was folgt daraus?

Unten siehst du eine Bildfolge, an der Du Schritte zur Konstruktion des Viereckes, gebildet aus den 4 Mittelpunkten der Vierecksseiten, sehen kannst.



Was ist das Besondere des gestrichelt gezeichneten Viereckes? - Begründe deine Behauptungen! - Achte dabei auf die Diagonalen in den Bildern 2 und 3.

Was für ein “Mittenviereck” wird sich wohl ergeben, wenn das äußere Viereck ein spezielles Viereck ist, z.B. ein Rechteck, oder ein Quadrat, oder ein Trapez, oder ein Parallelogramm, oder ....? - Stelle eigene Untersuchungen an.