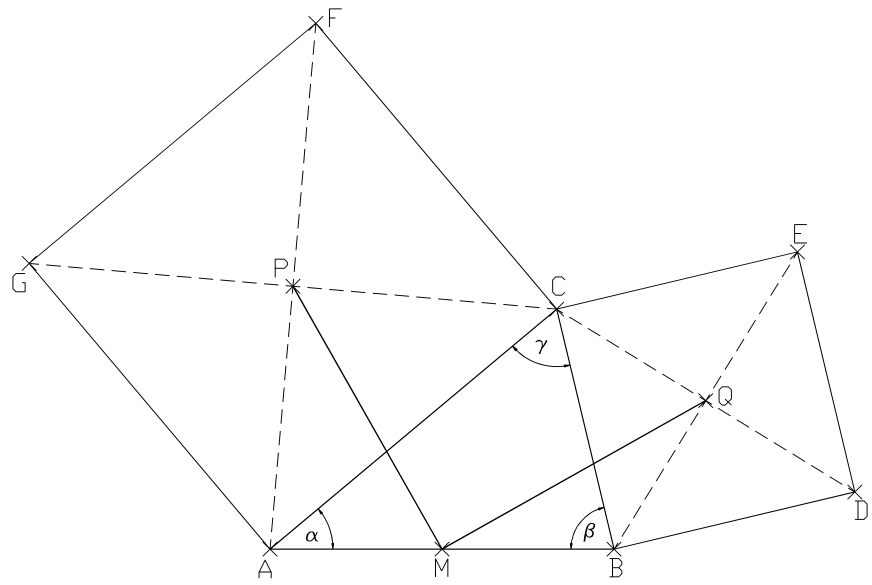
Dreieck, Viereck und Quadrate

(Wir üben, entdeckte Sachverhalte zu beweisen)

Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck ΔABC und füge den Seiten AC und BC ein Quadrat der entsprechenden Seitenlänge an. Achte bei der Wahl deines Dreiecks darauf, dass auch noch die Quadrate auf das Blatt passen. Konstruiere nun die Mittelpunkte P und Q der Quadrate, sowie den Mittelpunkt M der Grundseite AB. Verbinde P mit M und M mit Q.



1. Untersuche die Figur auf Besonderheiten. - Schon etwas entdeckt? - Vergleiche mit den Figuren der Nachbarn und formuliere Behauptungen aufgrund vermuteter Sachverhalte.

   Behauptungen:

---

2. Beweise: $\Delta AEC \cong \Delta FBC$

   womit aus der Kongruenz der Dreiecke folgt: $\overline{AE} = \overline{FB}$

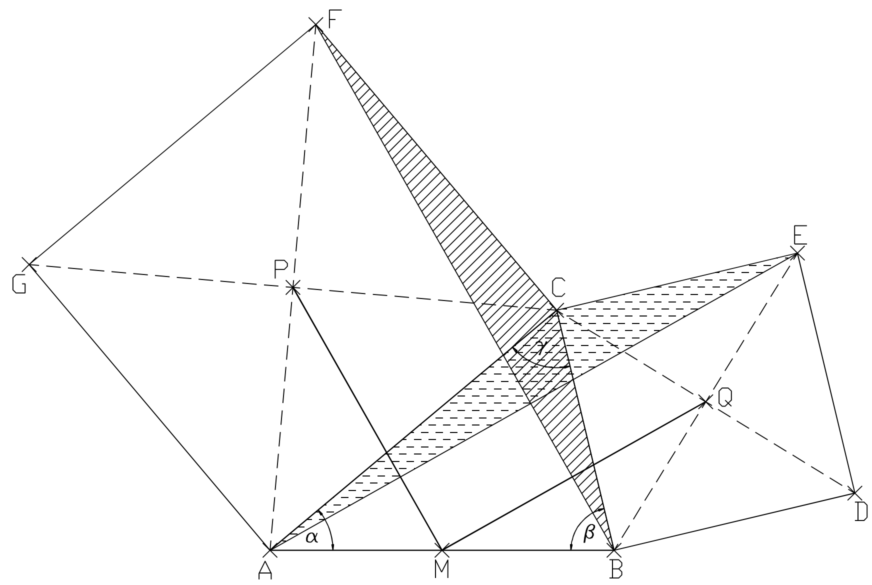
   $\wedge \ \overline{\sphericalangle EAC} = \overline{\sphericalangle BFC}$

   $\wedge \ \overline{\sphericalangle CEA} = \overline{\sphericalangle CBF}$

3. Begründe: $AE \perp BF$

4. Beweise: $\overline{PM} = \overline{MQ} \ \wedge \ PM \perp MQ$

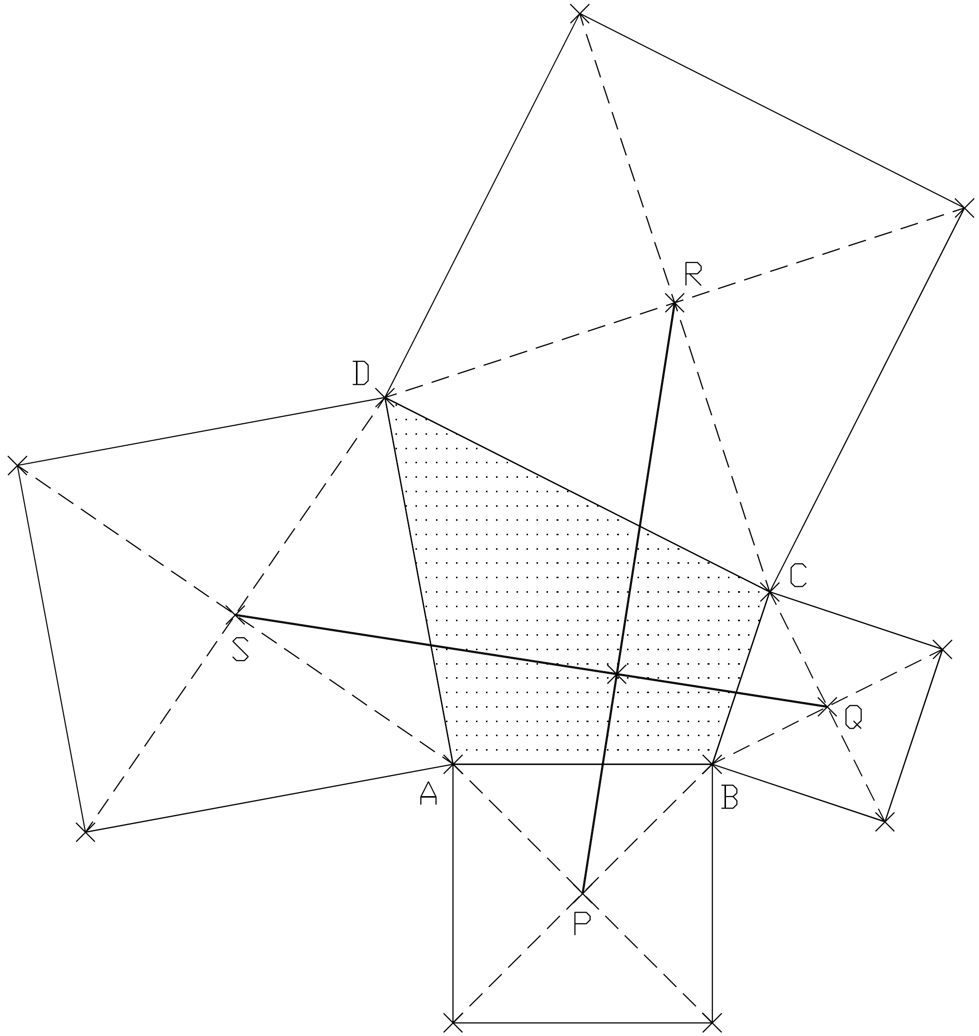
   (Tipp: Satz über die Mittelparallele in geeigneten Dreiecken)



Dreieck, Viereck und Quadrate

(Wir üben, entdeckte Sachverhalte zu beweisen)

Wir untersuchen nun einen ähnlichen Sachverhalt, indem wir Quadrate den Seiten eines Vierecks □ABCD anfügen, wiederum die Mittelpunkte der Quadrate konstruieren und dann die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Quadrate verbinden.[1]



5. Führe die Konstruktion mit einem eigenen, selbstgewählten Viereck durch. Bestätige konstruktiv die aus der Skizze entnommene Behauptung:

$$\boxed{\overline{SQ} = \overline{PR} \;\wedge\; SQ \perp PR}$$

Zum Beweis wollen wir versuchen, das zu verwenden, was wir schon gelernt haben. Dazu teilen wir unser Viereck durch eine Diagonale (z.B. BD) in zwei Dreiecke (z.B. ΔBCD und ΔABD) und konstruieren den Mittelpunkt M von BD.

Damit haben wir in den Teildreiecken genau die Voraussetzung hergestellt, die zu einer Aussage vergleichbar der Aufgabe 4 führt.

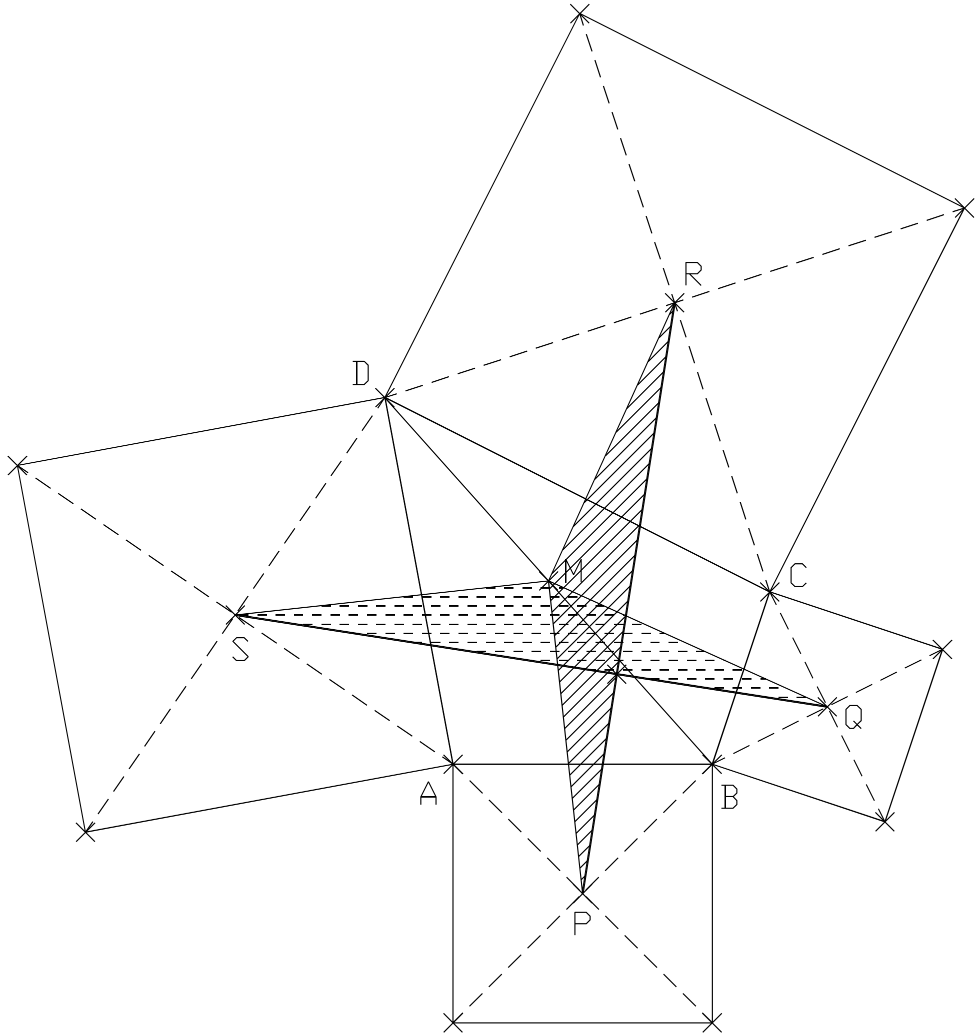
6. <u>Beweise:</u> $\Delta SQM \cong \Delta PRM$ (Skizze nächste Seite)

womit aus der Kongruenz der Dreiecke folgt:

$$\overline{SQ} = \overline{PR}$$
$$\wedge \; \overline{\sphericalangle QSM} = \overline{\sphericalangle RPM}$$
$$\wedge \; \overline{\sphericalangle MQS} = \overline{\sphericalangle MRP}$$

[1] Die Aufgabe geht zurück auf: Henricus Hubertus **van Aubel**, ✳ 20.11. 1830 in Maastricht, ✝ 03.02. 1906 in Antwerpen; <u>Quelle:</u> http://www.pandd.demon.nl/lemoine/vanaubel.htm

7. <u>Begründe:</u> SQ $\perp$ PR



Was haben wir alles verwendet, bis wir das Theorem von **van Aubel** bewiesen haben?

- Kongruenzsatz SWS
- Winkelsummensatz
- Scheitelwinkelsatz
- Satz über die Mittelparallele

War doch insgesamt gar nicht so schwer, oder?

Dreieck, Viereck und Quadrate

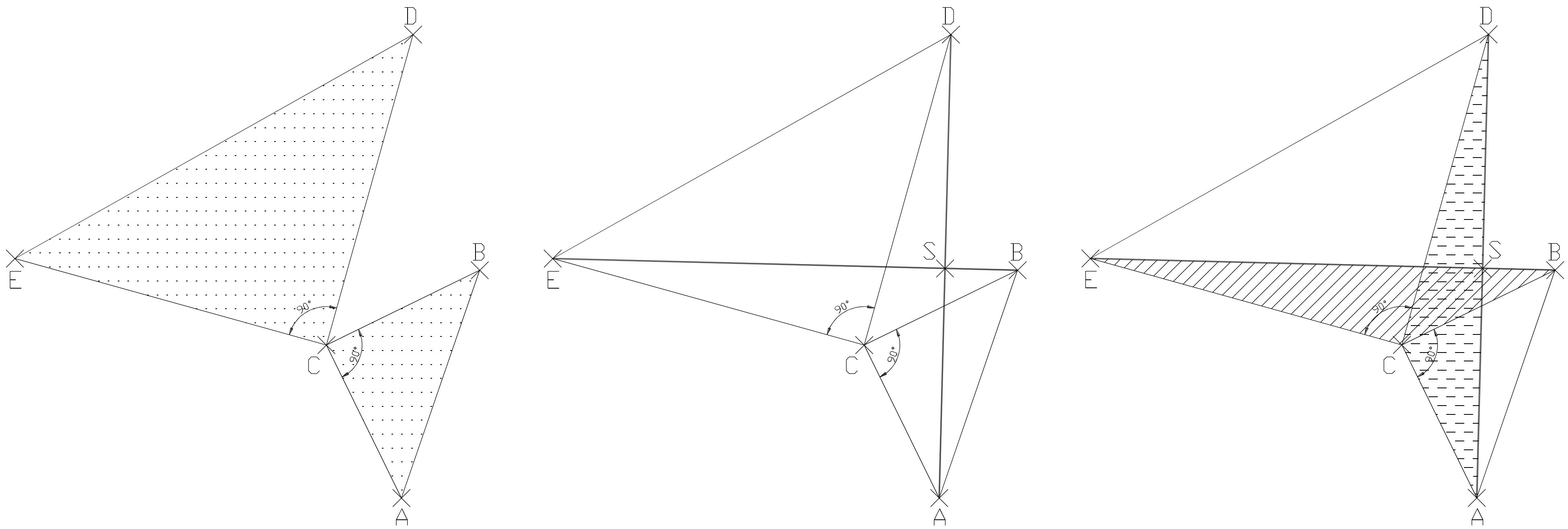
(Wir üben, entdeckte Sachverhalte zu beweisen)

<u>Hausaufgabe:</u>

Zeichne in dein Heft zwei rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke (ΔABC und ΔCDE), die den Scheitelpunkt C des rechten Winkels gemeinsam haben. (Du kannst dir den Punkt C als gemeinsamen Drehpunkt der halben Quadrate vorstellen - siehe linke Skizze). Zeichne die Strecken AD und EB; sie schneiden sich in einem Punkt S (siehe mittlere Skizze).

Beweise: $\boxed{\overline{AD} = \overline{EB} \quad \wedge \quad AD \perp EB}$

(Tipp: Argumentiere wieder mit der Kongruenz der Dreiecke ΔADC und ΔCBE - siehe rechte Skizze.)



Dreieck, Viereck und Quadrate

(Wir üben, entdeckte Sachverhalte zu beweisen)

<u>Zusatzaufgaben für Geometriefreaks:</u>

Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck ΔABC und füge den drei Seiten je ein Quadrat der entsprechenden Seitenlänge an. Die Mittelpunkte der drei Quadrate bilden ein weiteres Dreieck ΔDEF.

Konstruiere nun die Strecken AE, BF und CD (d.h. die Eckpunkte des Ausgangsdreieckes werden mit dem jeweiligen Quadratmittelpunkt der gegenüber liegenden Seite verbunden).

<u>Behauptung:</u>

Die Strecken AE, BF und CD verlaufen durch einen Punkt.

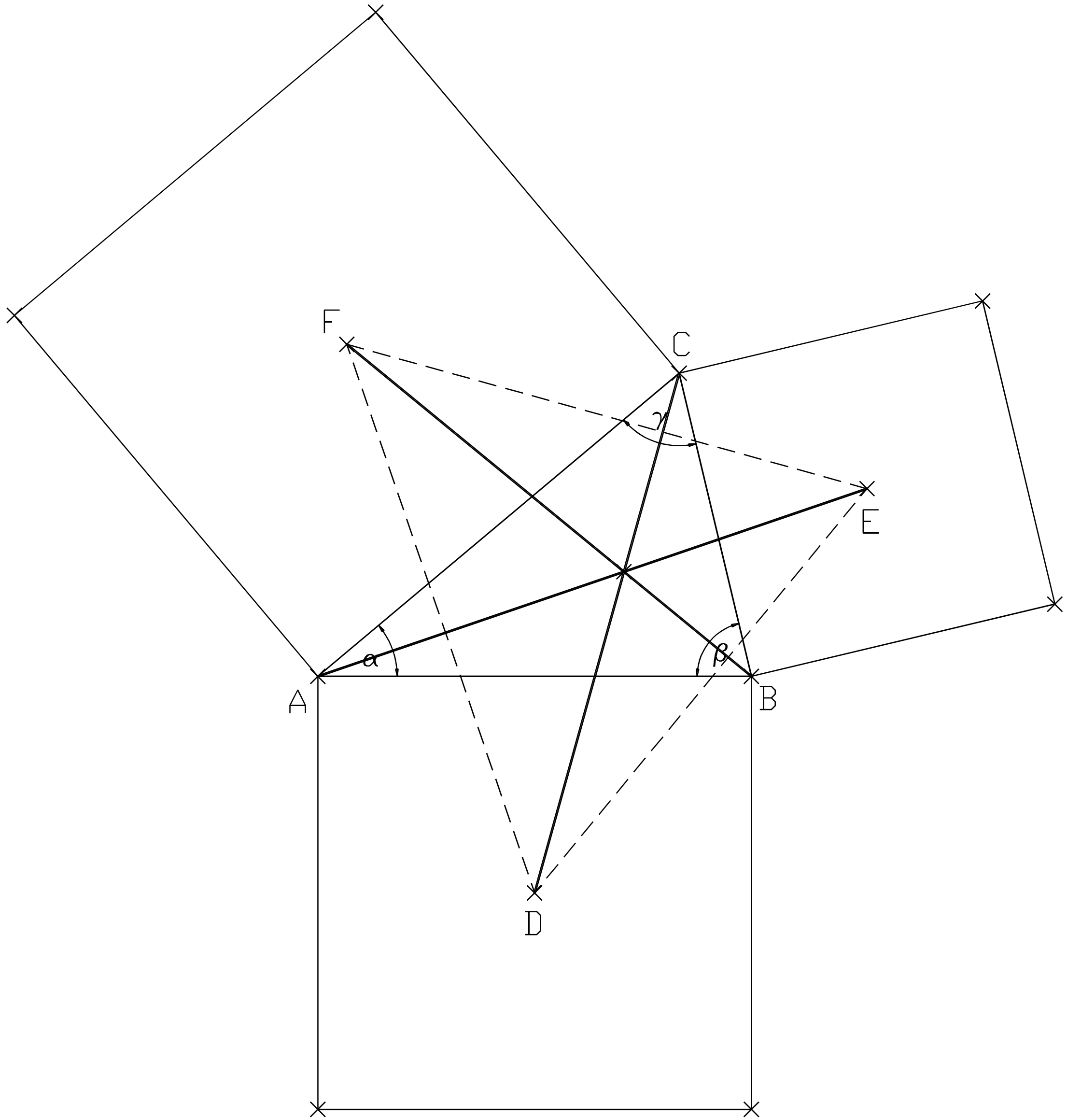
Au Backe, wie soll man das beweisen? - Das ist sicher nur etwas für Könner!

Wenn man sich die Skizze so ansieht, dann scheint es ja so zu sein, dass gilt:

$$AE \perp FD,\ BF \perp DE \text{ und } CD \perp FE.$$

Wenn wir das beweisen könnten, dann lägen AE, BF und CD auf den jeweiligen Höhen des Dreiecks ΔDEF, von denen wir wissen, dass sie durch einen Punkt verlaufen. - Fertig!

Wenn zusätzlich z.B. gilt: $\overline{AE} = \overline{FD}$, dann hat das sicher etwas mit den vorherigen Aufgaben zu tun.



Dreieck, Viereck und Quadrate

(Wir üben, entdeckte Sachverhalte zu beweisen)

<u>Beweis:</u>

M sei der Mittelpunkt von AB. - Nach Aufgabe 4 gilt:

$$\boxed{\overline{FM} = \overline{ME} \quad \wedge \quad FM \perp ME}$$

Die Dreiecke ΔADM und ΔFME sind damit rechtwinklig--gleichschenklige Dreiecke, die den Scheitelpunkt M des rechten Winkels gemeinsam haben.

Damit wissen wir nach dem Ergebnis der Hausaufgabe, dass gilt:

$$\boxed{\overline{AE} = \overline{FD} \quad \wedge \quad AE \perp FD}$$

Damit liegt AE auf derjenigen Höhe des Dreiecks ΔFDE, die entsteht, wenn man vom Punkt E das Lot auf die Seite FD fällt.

Jetzt müssen wir nur noch für die anderen beiden Dreiecksseiten BC und AC entsprechend dem Vorherigen argumentieren, also:

M sei der Mittelpunkt von BC. - Nach Aufgabe 4 gilt: .....

....

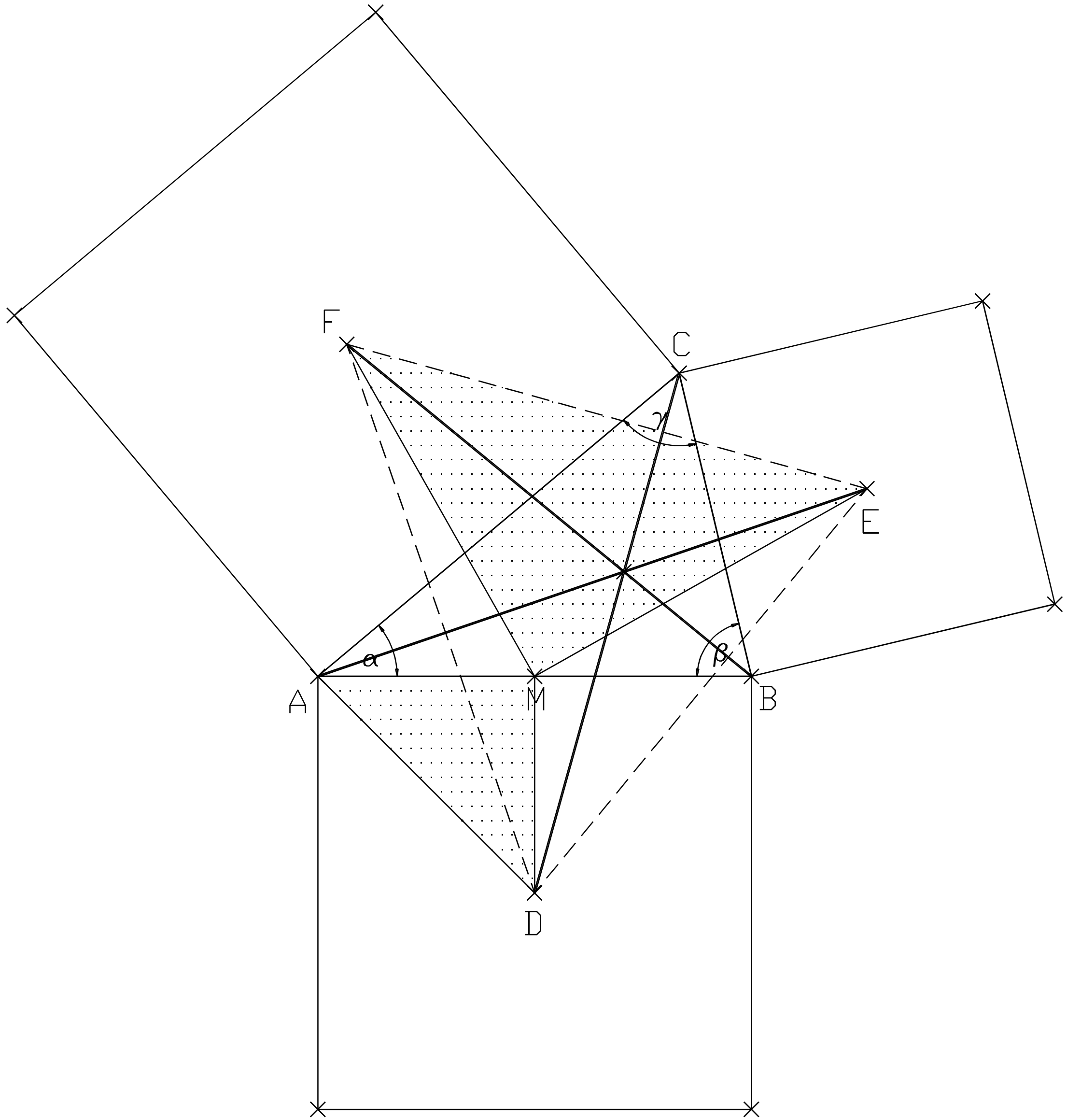
....

M sei der Mittelpunkt von AC. - Nach Aufgabe 4 gilt: .....

....

....

qed.

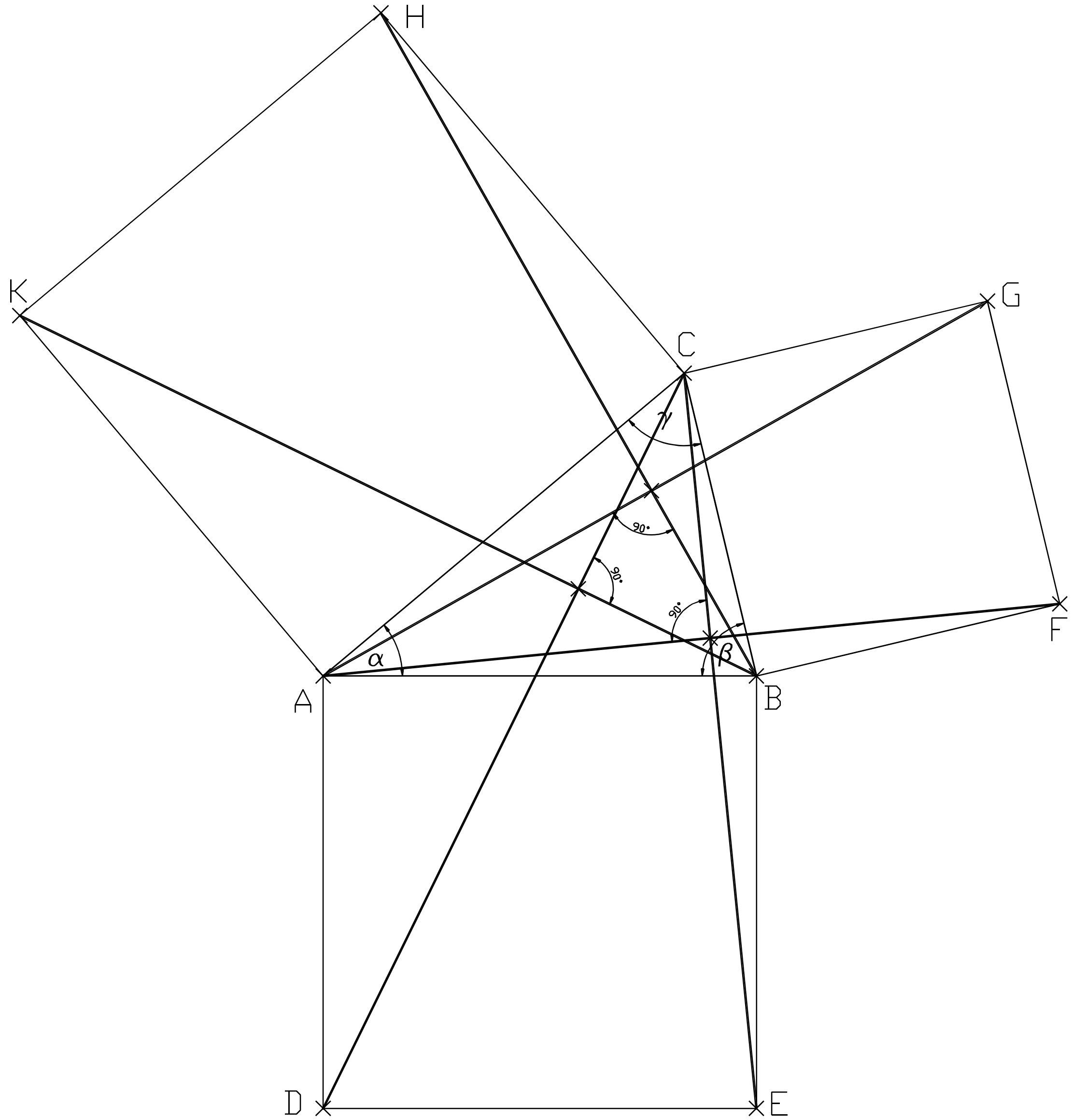


Dreieck, Viereck und Quadrate

(Wir üben, entdeckte Sachverhalte zu beweisen)

Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck ΔABC und füge den drei Seiten je ein Quadrat der entsprechenden Seitenlänge an. Benenne die jeweils zwei weiteren Quadratpunkte wie in der nebenstehenden Skizze.

Verbinde nun jeweils die zwei Quadratpunkte, die nicht zum Dreieck gehören, mit dem dritten Dreieckspunkt. Dabei entstehen die Strecken AF, AG, BH, BK, CD und CE.



Behauptung:

$$(CD \perp BK) \wedge (BH \perp AG) \wedge (AF \perp CE)$$

Beweis: „$CD \perp BK$“

Stellt man sich den Punkt A als Zentrum einer Drehung mit einem Drehwinkel δ der Größe $90°$ vor, so wandert der Punkt C bei der Drehung in den Punkt K, der Punkt D in den Punkt B, also die Strecke CD in die Strecke KB.

Nun bist du an der Reihe! - „$BH \perp AG$“ - „$AF \perp CE$“

Begründungstext: