# Zahlsysteme

## Es muss nicht immer 10 sein!

Bekanntlich rechnen wir üblicherweise mit Zahlen, die mit Ziffern aus einem Vorrat von 10 verschiedenen Zeichen beschrieben werden: { 0, 1, 2, ... , 8, 9 }, wobei die Ziffer 0 ganz wesentlich für ein Stellenwertsystem bzw das schriftliche Rechnen ist. - Übrigens, erst in der Zeitspanne von Gerbert von Aurillac, dem späteren Papst Silvester II, ( ~ 945 - 12.05.1003 ), bis zu Leonardo von Pisa ( ~ 1170/80 - ~ 1240 ) hat man in Mitteleuropa die Null und deren Bedeutung für das schriftliche Rechnen erkannt und gelernt.

**370291 gleich 237109 ?**

Zweimal wurden 6 Ziffern aufgeschrieben, jedoch in unterschiedlicher Reihenfolge, d.h. eine einzelne Ziffer steht möglicherweise an einer unterschiedlichen Stelle der Reihenfolge, womit wir im Stellenwertsystem mit unseren 10 Ziffern dieser Ziffer einen unterschiedlichen Wert zuweisen. - Seit der Grundschule ist uns vertraut: Einer-, Zehner-, Hunderter-, .... Stelle. - Was heißt das mathematisch noch einmal genau?

| • $1 \cdot 10^5$ | • $1 \cdot 10^4$ | • $1 \cdot 10^3$ | • $1 \cdot 10^2$ | • $1 \cdot 10^1$ | • $1 \cdot 10^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **3** | **7** | **0** | **2** | **9** | **1** |

Die Hochzahl (Exponent) gibt an, mit wie vielen Zehnen die Ziffer multipliziert werden muss, um ihren Wert im Dezimalsystem zu bestimmen (lateinisch 10: ‘decem’).

Wir rechnen also: $\mathbf{3} \cdot 100000 + \mathbf{7} \cdot 10000 + \mathbf{0} \cdot 1000 + \mathbf{2} \cdot 100 + \mathbf{9} \cdot 10 + \mathbf{1} \cdot 1$

Wir sprechen: Dreihundertsiebzig-Tausend - Zweihunderteinundneunzig

Ist dir schon einmal aufgefallen, dass wir sprachlich 3 Stellen als Block zusammenfassen und die Reihenfolge der Einer und Zehnerstelle vertauschen? - Warum sprechen wir eigentlich nicht: Zweihundertneunzig-eins? - Ist das in anderen Sprachen auch so?

---

In Berlin sagt man zu einem halben **Groschen**: **‘Sechser’**, und das sind bekanntlich 5 Pfennige. Aber wieso **Sechser**?

Nun, ein Groschen war früher, z.B. in Preußen, 12 Pfennige wert und die Vielfachen der Zahl 3 oder 6 haben sich, zumeist religiöser Ursachen wegen, in vielen Kulturen ‘rechentechnisch durchgesetzt’. Denke nur an Uhrzeiten, Winkelmaße, etc. die auf das Zahlsystem der Babylonier zurückgehen, das auf der **6** basierte.

Wir definieren uns ein Zahlsystem mit der Basiszahl **6**! - Klar ist, dass es in diesem System 6 verschiedene Ziffern geben muss, nämlich 0, 1, 2, 3, 4, 5. - Wir schreiben an unsere Zahlen nun zur Sicherheit die Basiszahl dazu.

$$\mathbf{2503_6}$$

Welchen Wert hätte denn diese Zahl im vertrauten Dezimalsystem?

| • $1 \cdot 6^5$ | • $1 \cdot 6^4$ | • $1 \cdot 6^3$ | • $1 \cdot 6^2$ | • $1 \cdot 6^1$ | • $1 \cdot 6^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **0** | **2** | **5** | **0** | **3** |

Wir rechnen: $\mathbf{2} \cdot 216 + \mathbf{5} \cdot 36 + \mathbf{0} \cdot 6 + \mathbf{3} \cdot 1 = \mathbf{615_{10}}$

# Zahlsysteme
## Es muss nicht immer 10 sein!

Das Verfahren muss ja wohl mit jeder (natürlichen) Basiszahl größer als 1 klappen, man muss nur einen entsprechenden Zeichenvorrat haben.

Wir versuchen es mit der kleinsten Möglichkeit, mit der Basiszahl **2**. - Im **Dual**system gibt es nur die Ziffern 0 und 1.

$$\mathbf{110101_2}$$

Welchen Wert hätte denn diese Zahl im vertrauten Dezimalsystem?

| • $1 \cdot 2^5$ | • $1 \cdot 2^4$ | • $1 \cdot 2^3$ | • $1 \cdot 2^2$ | • $1 \cdot 2^1$ | • $1 \cdot 2^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |

Wir rechnen: $\mathbf{1} \cdot 32 + \mathbf{1} \cdot 16 + \mathbf{0} \cdot 8 + \mathbf{1} \cdot 4 + \mathbf{0} \cdot 2 + \mathbf{1} \cdot 1 = \mathbf{53_{10}}$

---

Wird die Basiszahl größer als 10, so muss man sich weitere Ziffern definieren. Es ist üblich, für die Ziffer **10** den Buchstaben **A**, die Ziffer **11** den Buchstaben **B**, ... , die Ziffer **15** den Buchstaben **F**, usw , zu schreiben.

---

Aufgaben:

a) Bestimme den Wert im Dezimalsystem: $3154_6$, $3154_8$, $3154_{12}$ . - Warum ist die “Zahl” $3154_4$ nicht sinnvoll?

b) Bestimme den Wert im Dezimalsystem: $ABBA_{12}$, $ABBA_{16}$, $FF_{16}$, $CAD_{14}$, $1101110110_2$, $4711_8$ .

---

Wie rechnet man nun am einfachsten Dezimalzahlen in andere Zahlsysteme um? - Man könnte sich sicher den dezimalen Wert der einzelnen Stellen merken und entsprechend probieren, mit zulässigen Vervielfachungen “aufzufüllen”, wie das folgende Beispiel einer Umwandlung von $117_{10}$ in das Dualsystem zeigt.

Die Stelle mit sieben Zweien ($2^7 = 128$) ist zu groß, aber $2^6 = 64$ wird sicher benötigt. Nimmt man $2^5 = 32$ dazu, so ist man bei 96 angelangt, was noch zu klein ist. Nimmt man noch $2^4 = 16$ dazu, so ist man bei 112 angelangt, was immer noch zu klein ist. ....

Bestätige: $\mathbf{1} \cdot 64 + \mathbf{1} \cdot 32 + \mathbf{1} \cdot 16 + \mathbf{0} \cdot 8 + \mathbf{1} \cdot 4 + \mathbf{0} \cdot 2 + \mathbf{1} \cdot 1 = \mathbf{117_{10}} = \mathbf{1110101_2}$

***Geht das nicht auch systematisch?***

Nun, ein Stellenwertsystem ist so aufgebaut, dass von Stelle zu Stelle jeweils ein Faktor der Basiszahl dazu kommt. Wenn wir nun die Umkehroperation der Multiplikation, die Division, ganzzahlig durchführen - was ergibt sich?

370291 : 10 = 37029 Rest 1 (in der letzten Stelle war keine 10 ‘enthalten’)
37029 : 10 = 3702 Rest 9 (in der vorletzten Stelle war eine 10 ‘enthalten’)
3702 : 10 = 370 Rest 2 (die 2 stand auf der Hunderterstelle mit zwei mal einer 10!) usw.

# Zahlsysteme
## Es muss nicht immer 10 sein!

Das ist gar nicht schwer! **4711**

Als **Oktal**zahl (Basiszahl **8**):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4711 | : | 8 | = | 588 | Rest | 7 |
| 588 | : | 8 | = | 73 | Rest | 4 |
| 73 | : | 8 | = | 9 | Rest | 1 |
| 9 | : | 8 | = | 1 | Rest | 1 |
| 1 | : | 8 | = | 0 | Rest | 1 |

Probe: $\mathbf{1} \cdot 4096 + \mathbf{1} \cdot 512 + \mathbf{1} \cdot 64 + \mathbf{4} \cdot 8 + \mathbf{7} \cdot 1 = \mathbf{4711_{10}} = \mathbf{11147_8}$

Als **Dual**zahl (Basiszahl **2**):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4711 | : | 2 | = | 2355 | Rest | 1 |
| 2355 | : | 2 | = | 1177 | Rest | 1 |
| 1177 | : | 2 | = | 588 | Rest | 1 |
| 588 | : | 2 | = | 294 | Rest | 0 |
| 294 | : | 2 | = | 147 | Rest | 0 |
| 147 | : | 2 | = | 73 | Rest | 1 |
| 73 | : | 2 | = | 36 | Rest | 1 |
| 36 | : | 2 | = | 18 | Rest | 0 |
| 18 | : | 2 | = | 9 | Rest | 0 |
| 9 | : | 2 | = | 4 | Rest | 1 |
| 4 | : | 2 | = | 2 | Rest | 0 |
| 2 | : | 2 | = | 1 | Rest | 0 |
| 1 | : | 2 | = | 0 | Rest | 1 |

$$\mathbf{4711_{10}} = \mathbf{1001001100111_2}$$

Wenn man bedenkt, dass jede 8 aus 3 Zweien besteht, kann man dann die Oktalziffern in der Dualzahldarstellung erkennen?

<u>Aufgabe:</u> Wandele $\mathbf{4711_{10}}$ in die Systeme mit der Basiszahl **6** und **16** um!

.................................................................................................................................................................

Dualzahlen können ganz schön lang werden, allerdings hat dieses Zahlsystem den Vorteil, dass es nur zwei Ziffern gibt, was sich technisch leicht durch 2 verschiedene ‘Zustände’ (Licht an - Licht aus; Spannung - keine Spannung; langer Ton - kurzer Ton; Loch - kein Loch; magnetisch - nicht magnetisch; etc) realisieren läßt. - Deshalb ein kurzer Exkurs in die Informationstechnologie!

Ein **Bit** ist ein Speicherbaustein, der die zwei Zustände **0** und **1** annehmen kann. Dieses Kunstwort kommt von: **bi**nary digi**t**, was mathematisch eine Ziffer im Dualsystem beschreibt.
Für die Zusammenfassung von **8** Bits hat man das Wort: **Byte** geprägt, das heißt, dass mathematisch **1 Byte** eine 8-stellige Dualzahl ist.[1]

Die größte Zahl, die man demnach mit einem **Byte** darstellen kann ist demnach: $\mathbf{11111111_2}$ - Was ist dieser Wert als Dezimalzahl? - Verstehst Du nun, warum ein Zeichensatz beim Computer gewöhnlich aus 256 Zeichen besteht, wobei der “alte”, amerikanische Standard-Code für den Informationsaustausch (**A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange - abgekürzt: **ASCII**) nur 7 **Bit** verwendete, weil das

---

[1] <u>Besonderheit:</u> 1 **KB** (ein KiloByte) sind nicht 1000 (Kilo) Byte sondern $2^{10}$ =1024 Byte.

erste Bit des Byte als Steuerzeichen benutzt wurde?!

Weil nun Dualzahlen leicht sehr viele Stellen aufweisen, hat man (nicht nur in der Informationstechnologie) vereinbart, in einem Zahlsystem zu rechnen, das kürzere Zahldarstellungen, und damit eine größere Basiszahl verwendet.
In der technischen Realisierung hat man vereinbart, ein **halbes Byte** als Ziffer zu nehmen, das heißt in diesem Zahlsystem gibt es die Ziffern: $\mathbf{0000_2}$ , .... , $\mathbf{1111_2}$, das sind sechzehn verschiedene Ziffern!

Damit ist es klar: Das abgeleitete Zahlsystem, mit dem viele Computer arbeiten ist mathematisch das Zahlsystem mit der Basiszahl **16** (**Sedezimalsystem** ; alt: Hexadezimalsystem). Die Ziffern, die durch ein halbes Byte repräsentiert werden, sind 0, 1, 2, ...., D, E, F!

Aufgaben:

1) In der **ASCII**-Tabelle werden die großen Buchstaben dezimal, beginnend mit **A**, von **65** ab dargestellt, die kleinen Buchstaben kommen 32 Stellen später, der kleine Buchstabe **a** entspräche dezimal **97**. - Gib für das Wort: **Z a h l** , (a) den aus 4 **Dezimal**zahlen, (b) den aus 4 **Dual**zahlen, (c) den aus 4 **Sedezimal**zahlen bestehenden Code gemäß ASCII-Tabelle an.

2) “Geheimschrift”: Vereinbare mit deinem Nachbarn ein Zahlsystem und die Stellenanzahl für den Zahlcode jedes Buchstabens. Nun denkt sich jeder eine kurze, vertrauliche Nachricht aus. Codiert die Nachricht mit Hilfe der ASCII-Tabelle in euer Zahlsystem und tauscht aus! - Decodiere die Nachricht des Nachbarn (nicht schummeln!)

---

## Rechnen mit Dualzahlen

Unsere Welt ist zunehmend **digital** geprägt, nahezu Alles läßt sich einer Folge von Ziffern aus { **0** , **1** } beschreiben. - Kann man mit **Dualzahlen** eigentlich auch rechnen wie gewohnt?

Ausprobieren:[2]

Addition: $$\mathbf{110111100 + 10011010 =}$$

Subtraktion: $$\mathbf{1111000 - 1001110 =}$$

Multiplikation: $$\mathbf{101101 \cdot 101 =}$$

Division: $$\mathbf{101010000 : 11000 =}$$

Gib jeweils die zugehörige Rechnung in Dezimalzahlen an und vergleiche die Ergebnisse - Stimmt es? - Überprüfe deine Rechentechnik an jeweils einem weiteren (selbstgewählten) Beispiel!

Bei deinen Beispielen kann natürlich bei der Subtraktion und der Division ein kleines Problem aufgetaucht

[2] Schreibe, wie gewohnt, stellenweise untereinander (bzw rechne im “Päckchen”). Beachte Überträge bzw wann man etwas “borgen” muß - und - der multiplikative Unterschied im Wert benachbarter Stellen ist 2!

sein! - Es ist z.B. bei der Division zu vermuten, dass das Ergebnis nicht “aufgeht”. Was ist zu tun?

Dualzahlen mit Nachkommastellen:

# 101,1101

Vergleichen wir wieder mit unseren Vereinbarungen im Stellenwertsystem bei Dezimalzahlen, so ist darunter zu verstehen:

$$\mathbf{1} \cdot 4 + \mathbf{0} \cdot 2 + \mathbf{1} \cdot 1 + \mathbf{1} \cdot \frac{1}{2} + \mathbf{1} \cdot \frac{1}{4} + \mathbf{0} \cdot \frac{1}{8} + \mathbf{1} \cdot \frac{1}{16}$$

Bestätige, dass hier (dezimal) **5,8125** dargestellt wurde.

Da in der Bruchdarstellung im Nenner nur der Primfaktor 2 auftauchen kann, ist der Bruch, mit einer geeigneten Anzahl von Primfaktoren 5 immer so zu erweitern, dass die zugehörige Dezimaldarstellung endlich ist!

---

Subtraktion durch Komplementbildung:

Eine letzte rechentechnische Besonderheit soll nun noch dargestellt werden. Subtraktionsaufgaben lassen sich (durch geeignetes “Borgen”) auf die Addition zurückführen. - Zuerst ein Beispiel aus dem **Dezimal**system:

1) 864 - 517 = 864 + ( 1000 - 517 ) - 1000 = 864 + 483 (- 1000) = (1)347

2) 864 - 517 = 864 + ( 999 - **517** ) + 1 - 1000 = 864 + **482** + 1 (- 1000) = (1)347

Die geborgten 1000 gibt man nach der Addition einfach wieder zurück; aber warum im 2. Fall so kompliziert (999 + 1)? - Sieh dir die Ziffern der Subtraktionsaufgabe (517) und der Additionsaufgabe (482) an - was ergibt sich stets bei der Summe der Ziffern auf den entsprechenden Stellen?! - Was bedeutet dieses Verfahren im **Dual**system?

11011 - 10110 = 11011 + (11111 - **10110**) + 1 - 100000 = 11011 + **01001** + 1 (- 100000) = (1)00101

**Richtig!** - Die Ziffern-Schalter werden einfach umgedreht, dann addiert, geborgte Stelle auf Null gesetzt! So einfach kann Subtraktion sein! - Übrigens, welche Rechnung wurde denn da oben dual eigentlich ausgeführt?

Aufgabe: Rechne dual mit Komplementbildung: 57 - 39