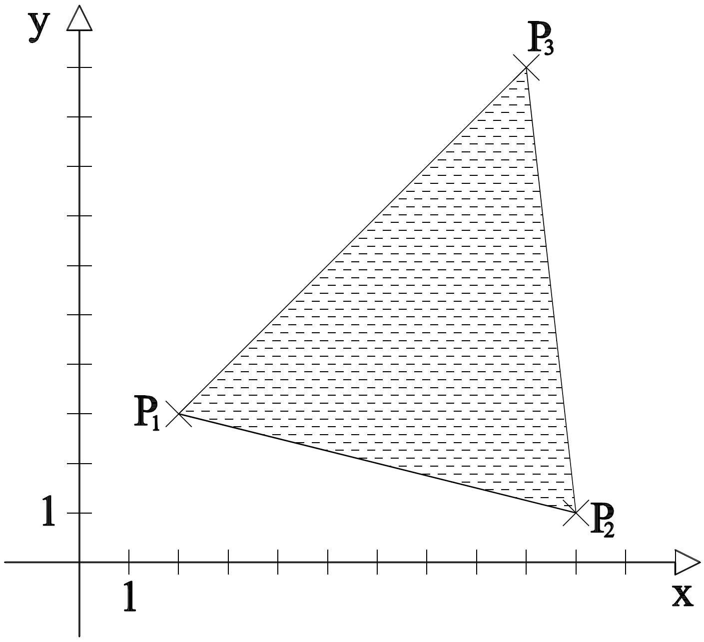
Geometrie und Koordinatensystem

Was hat René Descartes mit Flächeninhalten von Dreiecken zu tun?



René Descartes, - geboren am 31. März 1596 in La Haye, Touraine, Frankreich - gestorben am 11. Februar 1650 in Stockholm, Schweden, hat u.a. Geometrie mit analytischen Methoden betrieben, indem er über ein (kartesisches) Koordinatensystem geometrischen Objekten Maßzahlen, Kombinationen von Maßzahlen oder algebraische Terme zuordnete, mit denen man rechnen konnte. Wir wollen seine herausragende Idee ein weiteres Mal, nun für unsere Flächeninhaltsproblematik, nutzen.

1) Versuche durch Literaturrecherche (Lexikon, Internet, etc.) mehr über den berühmten Mathematiker, Philosophen, Naturwissenschaftler, Politiker, ... René Descartes zu erfahren.

2) In das Diagramm rechts oben ist ein Dreieck skizziert. Zeichne in dein Heft ein kartesisches Koordinatensystem und durch Wahl von 3 Punkten ein beliebiges Dreieck. Bestimme danach durch Messen der Längen der Dreiecksseiten und der Länge (mindestens) einer Höhe, den ungefähren Flächeninhalt deines Dreiecks.

$$A_\Delta \approx$$

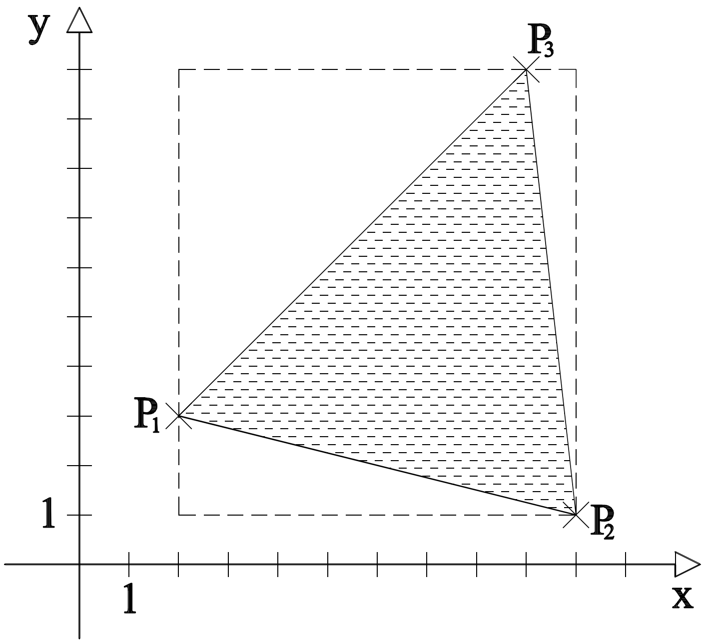
Nun, bisher haben wir die Tatsache, dass wir über das Koordinatensystem die Punkte mit einem geordneten Zahlenpaar kennzeichnen können, noch gar nicht genutzt. Hole das bitte jetzt nach und schreibe neben die jeweiligen Punkte das zugehörige Zahlenpaar. - Wie kann man nun die Koordinaten zur Bestimmung des Flächeninhaltes nutzen?

3) Zeichne um dein Dreieck ein umbeschriebenes Rechteck mit achsenparallelen Seiten und bestimme den Flächeninhalt dieses Rechteckes. Offensichtlich muss man nun nur die Inhalte der 3 (überstehenden) rechtwinkligen Dreiecke abziehen, um den Flächeninhalt des Dreieckes zu erhalten.

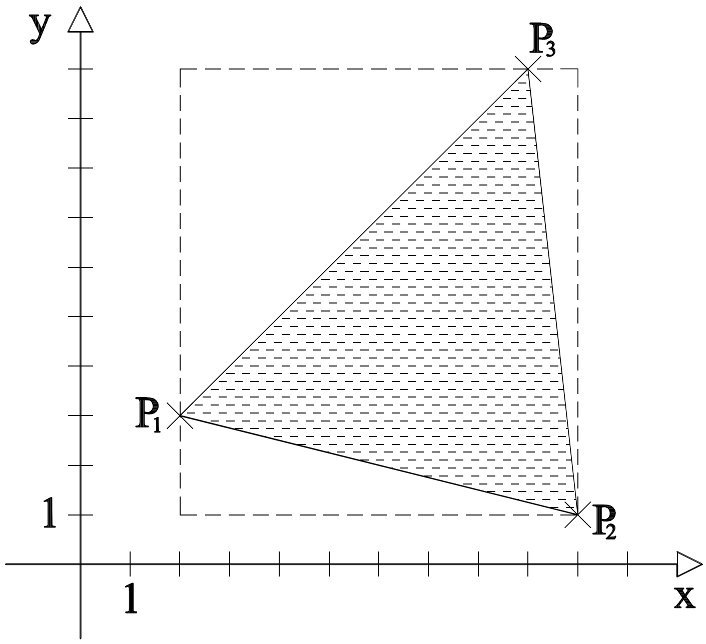
4) Gib den Flächeninhalt deines Dreieckes über Nutzung der Punktkoordinaten an.

$$A_\Delta =$$

Welcher Wert ist wohl genauer? - Warum?



Wir wollen versuchen, den Sachverhalt zu verallgemeinern.



5) Zeichne in deinem Heft ein neues Dreieck in ein Koordinatensystem und benenne die drei Eckpunkte durch allgemeine Punktepaare, wie z.B.:

$$\mathbf{P_1}\,(\,x_1 \mid y_1\,)\,.$$

Zeichne nun wiederum ein umbeschriebenes Rechteck und benenne Seitenlängen dieses Rechteckes, oder Teilstrecken von Seiten, über die gewählten Punktkoordinaten.

6) Beweise: $$\mathbf{A}_\Delta = \tfrac{1}{2}\cdot\left[\, x_1\cdot(y_2-y_3) + x_2\cdot(y_3-y_1) + x_3\cdot(y_1-y_2)\right],$$

und bestätige durch Einsetzen deiner konkreten Punktkoordinaten aus Aufgabe 4 die Gültigkeit der gefundenen Beziehung.

7) Wähle nun, falls du es nicht schon vorher gemacht hast, die Eckpunkte deines Dreiecks in <u>verschiedenen</u> Quadranten. Untersuche, ob auch in diesen Fällen die oben gefundene Beziehung richtig ist. Achte auf eine sinnvolle Punktreihenfolge, d.h. auf eine mathematisch positive Orientierung in der Bezeichnung.

<u>Nachtrag für Interessierte:</u>

In der Oberstufe wirst du lernen, dass man den Flächeninhalt eines Dreieckes auch so berechnen kann:

$$\mathbf{A}_\Delta = \tfrac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}(x_2-x_1) & (x_3-x_2)\\ (y_2-y_1) & (y_3-y_2)\end{vmatrix} := \tfrac{1}{2}\cdot\left[(x_2-x_1)\cdot(y_3-y_2) - (y_2-y_1)\cdot(x_3-x_2)\right]$$

Den Ausdruck mit den langen senkrechten Strichen nennt man zweireihige Determinante, deren Wert man so berechnet, dass man die Produkte der Diagonalen berechnet und dann subtrahiert. Man beginnt mit der Diagonalen von links oben nach rechts unten.

Beispiel: $$\begin{vmatrix}8 & 7\\ -2 & 7\end{vmatrix} := 8\cdot7 - (-2)\cdot7 = 70$$

8) Bestätige, dass der Ausdruck mit Hilfe der Determinante und der Ausdruck aus Aufgabe 6) gleich sind. Die 2 Spalten dieser Determinante kennzeichnen jeweils einen Weg (Verschiebung) zwischen Punkten. Welche Wege werden wohl durch die Spalten gekennzeichnet? (Achte auf die Vorzeichen!)
