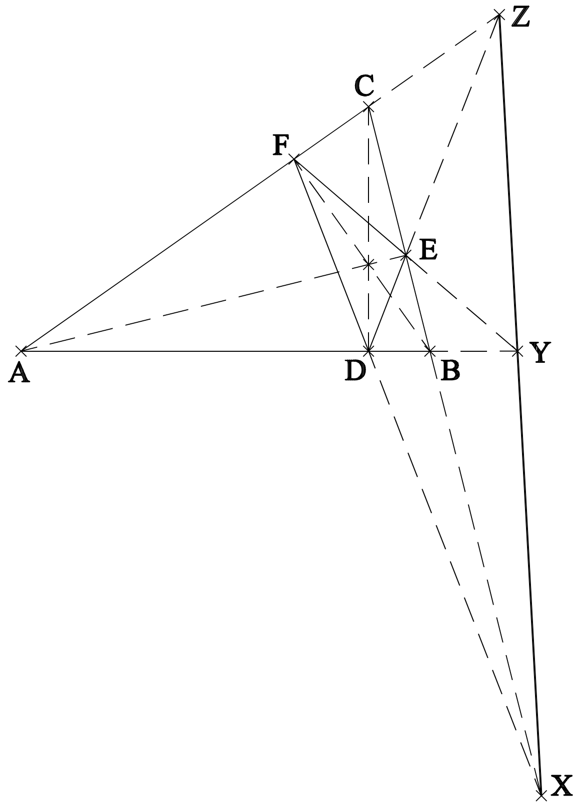
Höhendreieck und Kollinearität

oder: ... Wie zeigt man, dass 3 Punkte auf einer Geraden liegen?

Wir wissen, dass sich bei einem Dreieck ΔABC die drei Höhen in einem Punkt H schneiden. Doch das soll uns im Moment nicht weiter interessieren.
Wir wollen uns nun ein wenig mit dem Dreieck beschäftigen, das aus den Lotfußpunkten der drei Höhen gebildet wird, d.h. mit dem Dreieck ΔDEF (entsprechend der nebenstehenden Skizze).



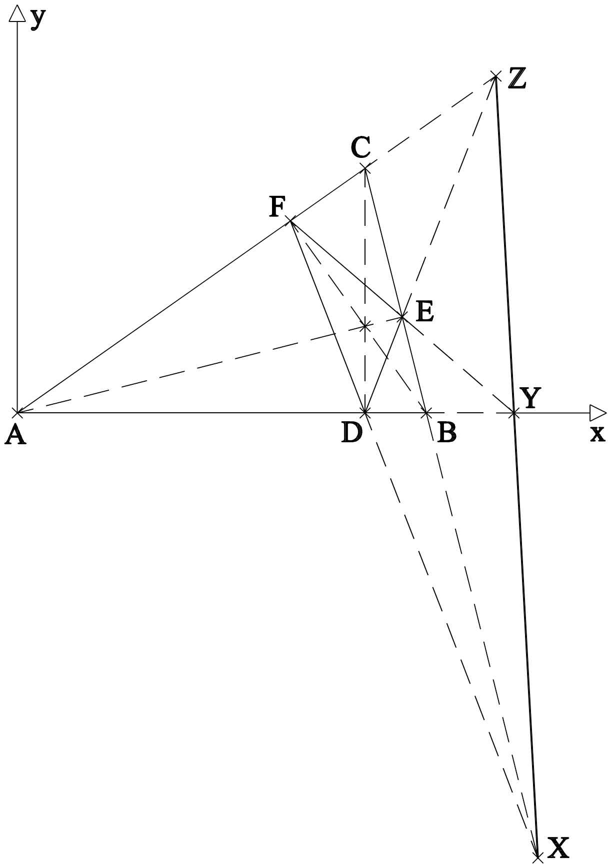
Ich habe die Dreiecksseiten des Ausgangsdreiecks ΔABC und des Höhendreiecks ΔDEF ein wenig verlängert und in meiner Skizze sieht es so aus, als würden die drei sich ergebenden Schnittpunkte X, Y und Z auf einer Geraden liegen.

Aufgabe:

Überprüfe den oben beschriebenen Sachverhalt an einem selbstkonstruierten Beispiel. Achte bei der Wahl der Punkte A, B, C darauf, dass die möglichen Schnittpunkte, z.B. von g(F,D) und g(C,B) noch auf das Blatt passen.

Wenn auch bei deinem Beispiel X, Y und Z auf einer Geraden liegen (Fachbegriff: „kollinear sind“), so überlege, wie man diese Eigenschaft beweisen könnte.

Am besten rechnen wir nach der Strategie von René Descartes einfach die Steigungen der Geraden g(X,Y) und g(Y,Z) aus. Sind diese Steigungen gleich, so müssen die drei Punkte X, Y, Z tatsächlich kollinear sein, da diese Geraden ja außerdem noch den gemeinsamen Punkt Y besitzen.



Wir zeichnen uns ein Koordinatensystem und legen geschickterweise den Punkt A in den Ursprung des Koordinatensystems und die Seite AB auf die x-Achse.

Aufgabe:

Es gelte: $\mathbf{B}\left(\ 6 \mid\ 0\ \right)$ und $\mathbf{C}\left(\ 5 \mid\ \frac{7}{2}\right)$.

Bestimme die Koordinaten der Punkte D, E und F in Abhängigkeit von x_B, x_C und y_C. - Begründe, dass die Steigung m_H einer Höhe der negative Kehrwert der Steigung m der zugehörigen Grundseite ist ($m \neq 0$).

$$\left(\quad m_H = -\frac{1}{m}\quad\right)$$

Höhendreieck und Kollinearität

oder: ... Wie zeigt man, dass 3 Punkte auf einer Geraden liegen?

Vergleiche deine errechneten Punktkoordinaten mit den Ergebnissen der Nachbarn. Wer besonders pfiffig ist kann ja versuchen, diese Punktkoordinaten allgemein aus den Punkten $\mathbf{B}\left(x_B \mid 0 \right)$ und $\mathbf{C}\left(x_C \mid y_C \right)$ zu bestimmen (schwierig!).

Aufgaben:

Am besten teilt ihr die Arbeit nun in Gruppen auf. - Bestimmt Gleichungen für die Geradenpaare: g(A,C) und g(D,E), g(A,B) und g(F,E), g(C,B) und g(F,D) und errechnet die Punktkoordinaten von X, Y und Z aus zugehörigen Schnittpunktsbedingungen.

Bestätigt (oder widerlegt), dass die Steigungen der Geraden g(Z,Y) und g(Y,X) gleich sind.

Könnte es bei bestimmten Dreiecken mit dem oben beschriebenen Sachverhalt Probleme geben? - Wenn ja, wieso? - Gib gegebenenfalls ein problematisches Beispiel an.