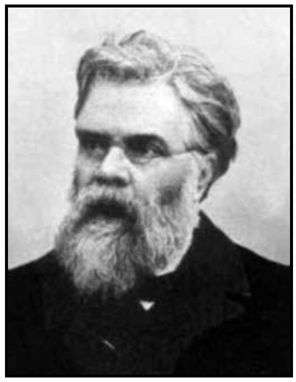
Das Dreitangentenproblem

oder: ... Können wir das Theorem von Lemoine bestätigen?

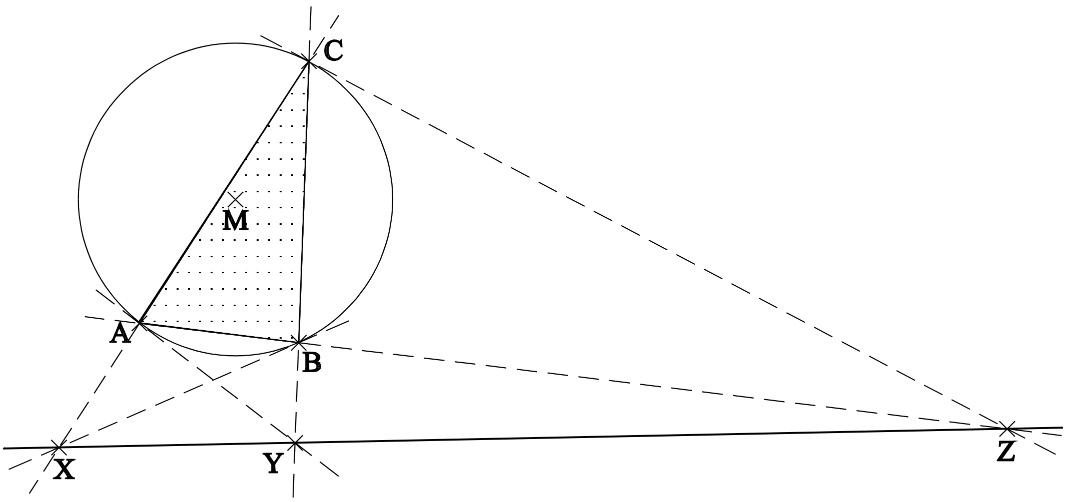


Auf den französischen Mathematiker Emile **Lemoine**[1] geht das folgende Dreitangentenproblem zurück:

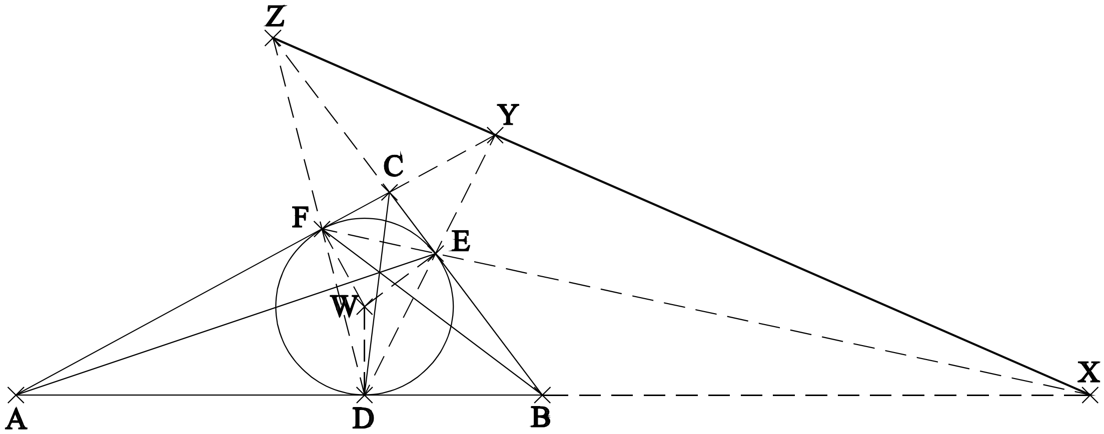
Zeichnet man in drei Kreispunkten A, B und C die Kreistangenten t_A, t_B und t_C und konstruiert die Schnittpunkte der Geraden durch jeweils zwei Kreispunkte mit der Tangente an den dritten Kreispunkt (Tangenten nicht parallel zu den Geraden), d.h.

$$\{X\} := g(A;C) \cap t_B \;\wedge\; \{Y\} := g(B;C) \cap t_A \;\wedge\; \{Z\} := g(A;B) \cap t_C$$

so liegen die drei Punkte X, Y und Z auf einer Geraden (sind kollinear).



Nimmt man den Kreis als Innenkreis eines Dreiecks ΔABC und zeichnet die Tangenten in den Berührpunkten D, E und F dieses Kreises, so gilt ein entsprechender Sachverhalt und das Dreieck ΔDEF entspricht dem obigen inneren Dreieck. - Umgekehrt: Wenn man im obigen Fall ein umgebendes Dreieck aus sich schneidenden Tangenten betrachten würde, entspräche dies dem unteren Sachverhalt. - Die Gerade, auf der im unteren Fall die Punkte X, Y und Z liegen, wird **Gergonne**-Gerade genannt.[2]



---

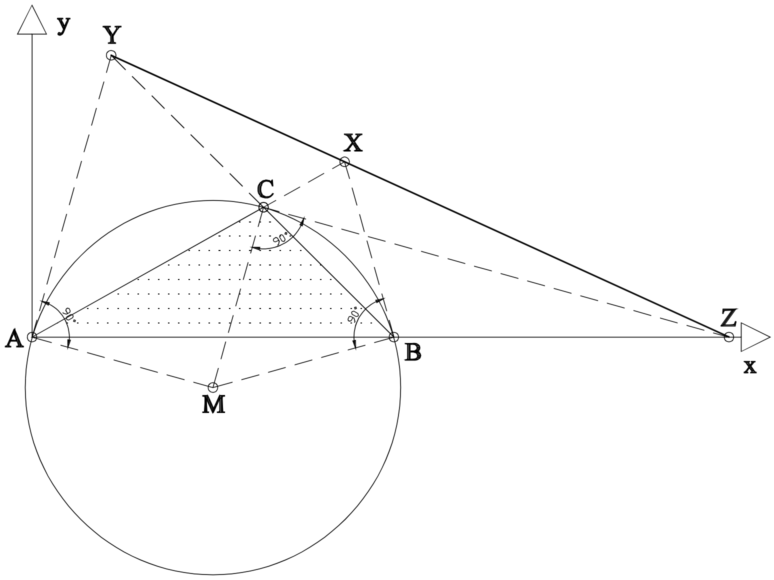
[1] Emile Michel Hyacinthe **Lemoine**, ✳ 22. 11. 1840 in Quimper, † 21. 02. 1912 in Paris

[2] Joseph Diaz **Gergonne**, ✳ 19. 06. 1771 in Nancy, † 04. 05. 1859 in Montpellier

Das Dreitangentenproblem

oder: ... Können wir das Theorem von Lemoine bestätigen?

Wir wollen versuchen, das Theorem von Lemoine rechnerisch zu bestätigen, indem wir uns ein kartesisches Koordinatensystem definieren.
Geschickterweise wählen wir die Punkte A(0 | 0) und B(x_B | 0) auf der x-Achse und beschreiben den dritten Dreieckspunkt durch C(x_C | y_C).



1. Bestätige (oder widerlege) die nachfolgend angegebenen Koordinaten des Kreismittelpunktes und die aufgeführten Geradengleichungen. Beachte, dass M der Schnittpunkt von Mittelsenkrechten ist.

   Begründe dazu zuvor, dass gilt: $m^{\perp} = -\frac{1}{m}$; $M_{AB}\left(\frac{1}{2}\cdot x_B \middle| 0\right)$; $M_{AC}\left(\frac{1}{2}\cdot x_C \middle| \frac{1}{2}\cdot y_C\right)$

$$M\left(\frac{1}{2}\cdot x_B \;\middle|\; \frac{1}{2}\cdot\left(y_C + \frac{x_C}{y_C}\cdot(x_C - x_B)\right)\right)$$

$$g(A;B):\quad y \equiv 0$$

$$g(B;C):\quad y = \frac{y_C}{x_C - x_B}\cdot(x - x_B)$$

$$g(C;A):\quad y = \frac{y_C}{x_C}\cdot x$$

Im folgenden rechnen wir mit den konkreten Zahlen $x_B := 5$, $x_C := 3$ und $y_C := \frac{3}{2}$.

2. Bestätige: $M\left(\frac{5}{2} \middle| -\frac{5}{4}\right)$

   und bestimme die konkreten Geradengleichungen aus Aufgabe 1.

3. Bestätige:

$$t_A:\quad y = 2\cdot x$$

$$t_B:\quad y = -2\cdot x + 10$$

$$t_C:\quad y = -\frac{2}{11}\cdot x + \frac{45}{22}$$

   und überprüfe die Richtigkeit der angegebenen Punktkoordinaten über geeignete Schnittpunktsbedingungen.

$$X(4 \mid 2) \wedge Y\left(\frac{15}{11} \middle| \frac{30}{11}\right) \wedge Z\left(\frac{45}{4} \middle| 0\right)$$

4. Beweise, dass X, Y und Z auf einer Geraden liegen.