Tilgung eines Kredits

Bestimmung der jährlichen Rückzahlungsrate

Kreditsumme:	$\mathbf{K}$	
Zinsoperator:	$\mathbf{p\%}$;	$\mathbf{q := 100\% + p\% = 1 + \frac{p}{100}}$
Laufzeit (Jahre):	$\mathbf{n}$	
Jährliche Rückzahlung:	$\mathbf{A}$	

Restschuld nach

1 Jahr:	$\mathbf{(K \cdot q - A) =: K_1}$
2 Jahren:	$\mathbf{(K_1 \cdot q - A) =: K_2}$
3 Jahren:	$\mathbf{(K_2 \cdot q - A) =: K_3}$
4 Jahren:	$\mathbf{(K_3 \cdot q - A) =: K_4}$
....	
n Jahren:	$\mathbf{(K_{n-1} \cdot q - A) =: 0}$ (Schuld getilgt)

Durch Einsetzen von $\mathbf{K_1}$ in $\mathbf{K_2}$, dann von $\mathbf{K_2}$ in $\mathbf{K_3}$, dann von $\mathbf{K_3}$ in $\mathbf{K_4}$, dann von ...., und zum Schluß von $\mathbf{K_{n-1}}$ in den untersten Klammerausdruck, ergibt sich durch vielfache Anwendung des Distributivgesetzes:

$$\mathbf{K \cdot q^n - A \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + ... + q + 1) = 0}$$

Für die Klammer gibt es den Ausdruck: $\mathbf{\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = \dfrac{(1+p\%)^n - 1}{p\%}}$![1]

Auflösen der Gleichung nach **A** ergibt: $$\mathbf{A = \frac{K \cdot (1+p\%)^n \cdot p\%}{(1+p\%)^n - 1}}$$

---

1 Beweis:

$$\begin{aligned} S &:= q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q + 1 \\ q \cdot S &= q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q \\ q \cdot S - S &= q^n - 1 \quad \text{(1.Zeile von 2.Zeile subtrahiert)} \\ S \cdot (q-1) &= q^n - 1 \end{aligned}$$

Zinsoperator p% p.m.

Bestimmung des Effektivzinsoperators (p% p.a.)

Kreditsumme:	$\mathbf{K}$		
Zinsoperator:	$\mathbf{p\%}$ **p.m.**		
Laufzeit (Monate):	$\mathbf{m}$	Laufzeit (Jahre):	$\mathbf{\frac{m}{12}}$
Bearbeitungsgebühr:	$\mathbf{q\% \cdot K}$		

zu tilgende Kreditschuld:	$\mathbf{S_K = K \cdot (1 + p\%)^m}$
Bearbeitungsschuld:	$\mathbf{S_B = K \cdot q\%}$
zu tilgende Gesamtschuld:	$\mathbf{S_G = S_K + S_B}$
zu berücksichtigende Zinsen:	$\mathbf{Z = S_G - K}$

Sei **p% p.a.** der jährliche Effektivzinssatz, dann sähe eine entsprechende Zinsbelastung in der Entwicklung folgendermaßen aus:

1.Jahr:	$\mathbf{Z_1 = p\% \cdot K}$	
2.Jahr:	$\mathbf{Z_2 = p\% \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot K}$	(n-ter Teil des Kredits getilgt)
3.Jahr:	$\mathbf{Z_3 = p\% \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot K}$	(n-ter Teil des Kredits getilgt)
	....	
n.Jahr:	$\mathbf{Z_n = p\% \cdot \frac{1}{n} \cdot K}$	(n-ter Teil des Kredits getilgt)

Vergleich der 2 verschiedenenen Zinsberechnungen ergibt:

$$\mathbf{Z = S_G - K = Z_1 + Z_2 + Z_3 + ... + Z_n = p\% \cdot K \cdot \frac{1}{n} \cdot [n + (n-1) + (n-2) + ... + 1]}$$

$$\mathbf{= p\% \cdot K \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}}\ .$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbf{p\% = \frac{(S_G - K) \cdot 2}{K \cdot (n+1)}}$$