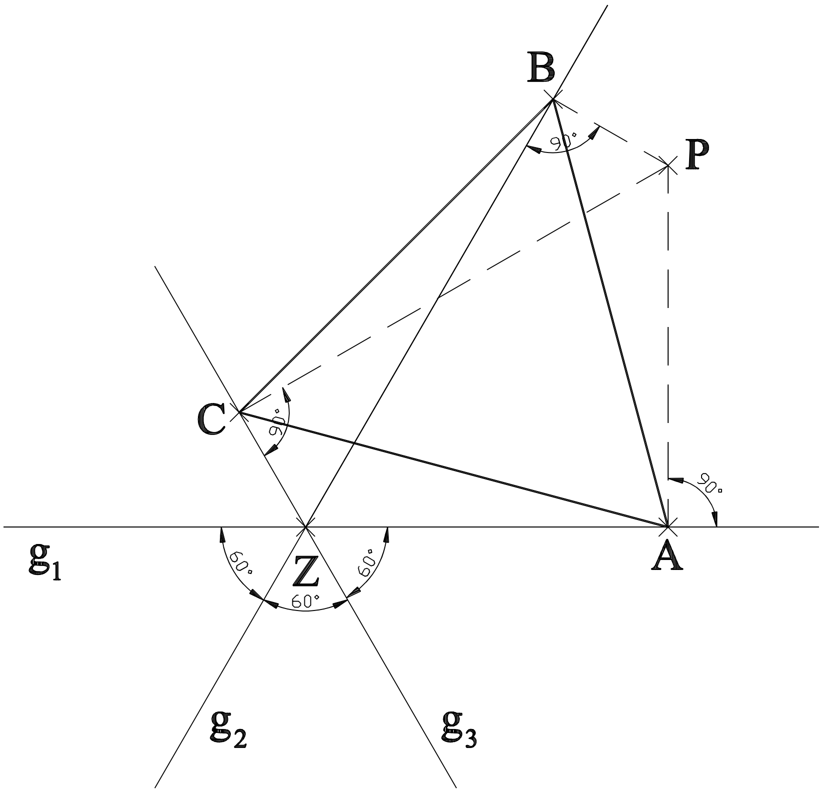
Lotfußpunkte und Dreieck

Ein weiteres Mal verwenden wir bekannte Sätze für entdeckte Eigenschaften

Gegeben sind 3 Geraden, die sich in einem Punkt Z schneiden und die paarweise Winkel vom Maß 60° einschließen.

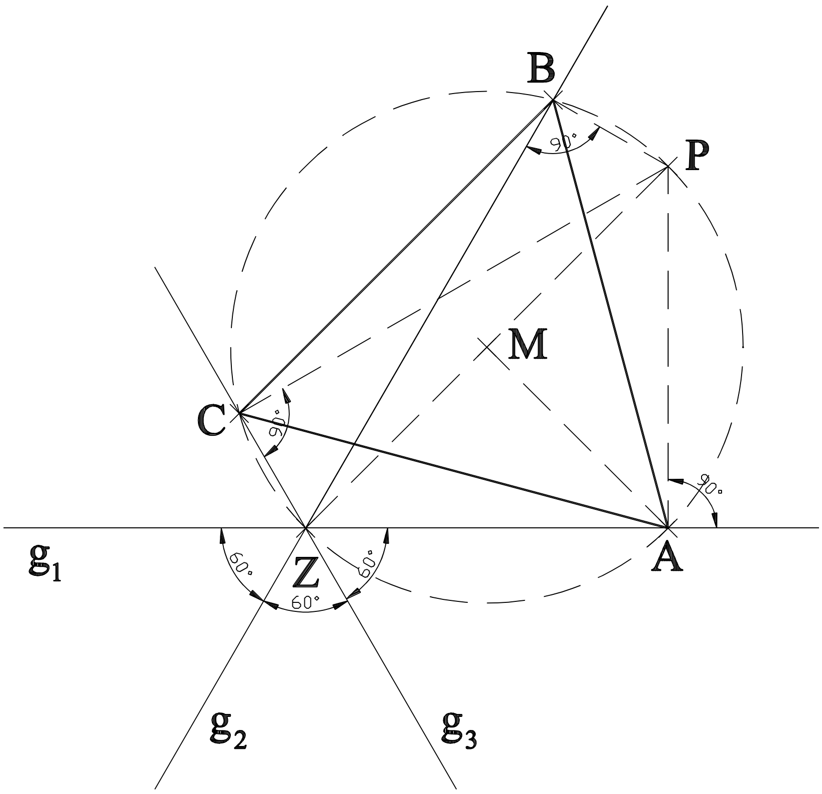
Von einem Punkt P der Zeichenebene, der auf keiner der 3 Geraden liegt, fällt man die Lote auf die Geraden. Die Lotfußpunkte bilden ein Dreieck ΔABC (siehe Skizze).[1]



Aufgabe:

Fertige eine eigene Konstruktion im Heft an (bitte nicht zu klein) und untersuche die Figur auf Besonderheiten. Verabrede dabei mit den Nachbarn eine unterschiedliche Lage von P und vergleicht danach die Untersuchungsergebnisse.

Es sieht so aus, als ob das Dreieck ΔABC, gebildet aus den drei Lotfußpunkten, gleichseitig ist und dass die fünf Punkte A, P, B, C und Z auf einem Kreis mit Durchmesser PZ liegen.



Ist das in deiner Konstruktion auch so? - Vergleiche mit den Ergebnissen der anderen.

Aufgabe:

Bestimme weitere, in der Skizze auftretende Winkelgrößen zuerst durch Messung und versuche dann, die Meßergebnisse mit bekannten Sätzen zu begründen

---

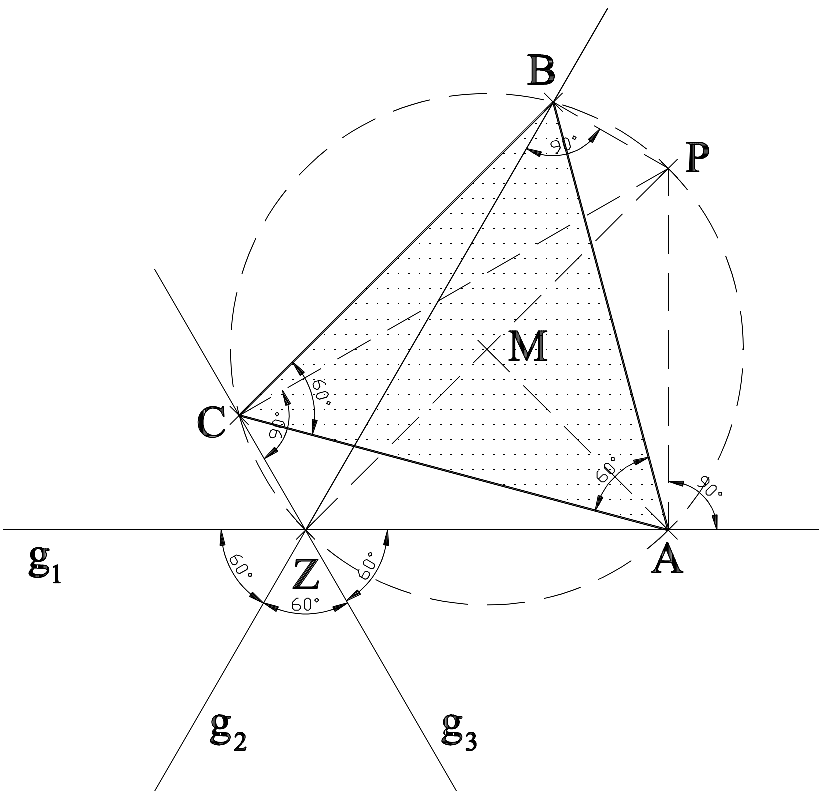
1 Quelle: http://www.bundeswettbewerb-mathematik.de/juma/

Lotfußpunkte und Dreieck

Ein weiteres Mal verwenden wir bekannte Sätze für entdeckte Eigenschaften

Aufgabe:

Begründe die folgenden Behauptungen:[2]



- A, B und C liegen auf dem Kreis k mit dem Durchmesser ZP.
- $\overline{\sphericalangle BPA} = 120°$
- $\overline{\sphericalangle ACB} = 60°$
- $\overline{\sphericalangle AZM} = \overline{\sphericalangle MPA} = 45°$
- $\overline{\sphericalangle BPZ} = 75°$ und
  $\overline{\sphericalangle PZB} = 15°$
- $\overline{\sphericalangle PAB} = 15°$
- $\overline{\sphericalangle ZBA} = 45°$ und
  $\overline{\sphericalangle ZMA} = 90°$
- $\overline{\sphericalangle BAM} = \overline{\sphericalangle MAC} = 30°$
- $\overline{\sphericalangle BAC} = 60°$
- Das Dreieck ΔABC ist gleichseitig.

2 Tipp: Bei der Argumentation könnten eventuell eine Rolle spielen der Basiswinkelsatz, der Umfangswinkelsatz, der Kehrsatz des Satzes des Thales, der Nebenwinkelsatz, der Sehnenviereckssatz, die Achsenspiegelung, der Winkelsummensatz.

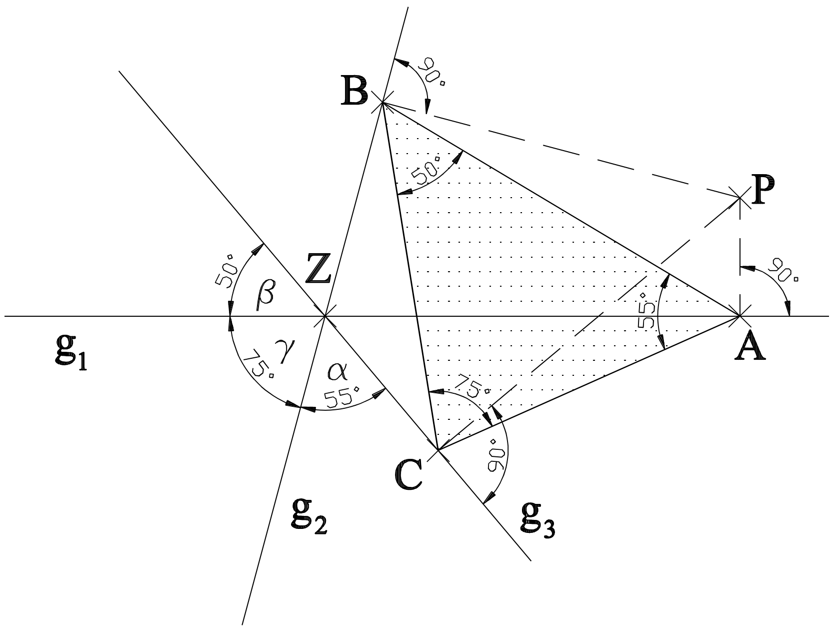
Lotfußpunkte und Dreieck

Ein weiteres Mal verwenden wir bekannte Sätze für entdeckte Eigenschaften

<u>Verallgemeinerung:</u>

Gegeben sind 3 Geraden, die sich in einem Punkt Z schneiden und die paarweise Winkel vom Maß α, β und γ einschließen.

Von einem Punkt P der Zeichenebene, der auf keiner der 3 Geraden liegt, fällt man die Lote auf die Geraden. Die Lotfußpunkte bilden ein Dreieck ΔABC (siehe Skizze).

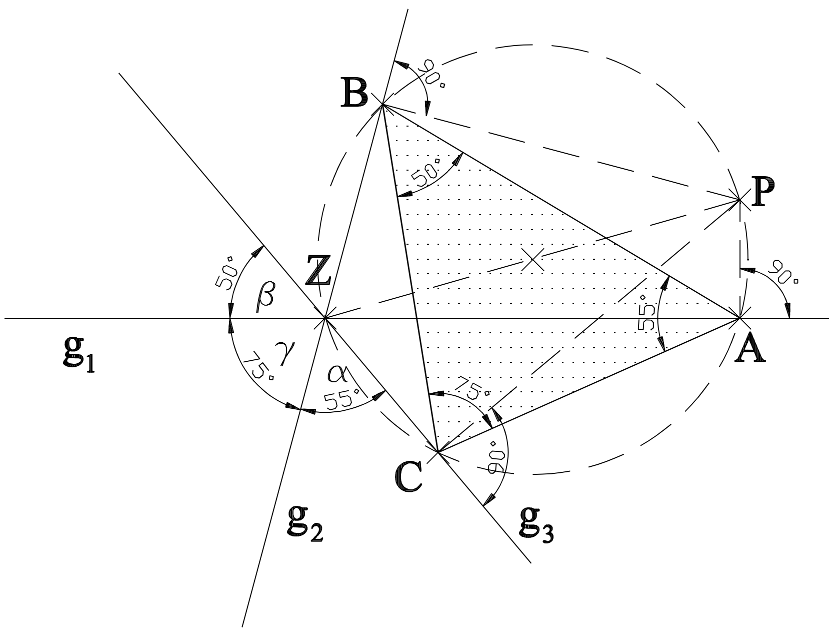


<u>Behauptung:</u>

Die Winkel zwischen den 3 Geraden sind kongruent zu den 3 Innenwinkeln des Dreiecks ΔABC.

<u>Beweis:</u>

Kehrsatz des Satzes des Thales:
Die Punkte A, B, C liegen auf einem Kreis mit Durchmesser ZP.



Umfangswinkelsatz (Sehne AB):
$\overline{\sphericalangle ACB} = \overline{\sphericalangle AZB}$ (γ)

Sehnenviereckssatz: (□PBZC):
$\overline{\sphericalangle BPC} = 180° - \overline{\sphericalangle CZB}$

Umfangswinkelsatz (Sehne BC):
$\overline{\sphericalangle BPC} = \overline{\sphericalangle BAC}$ (α)

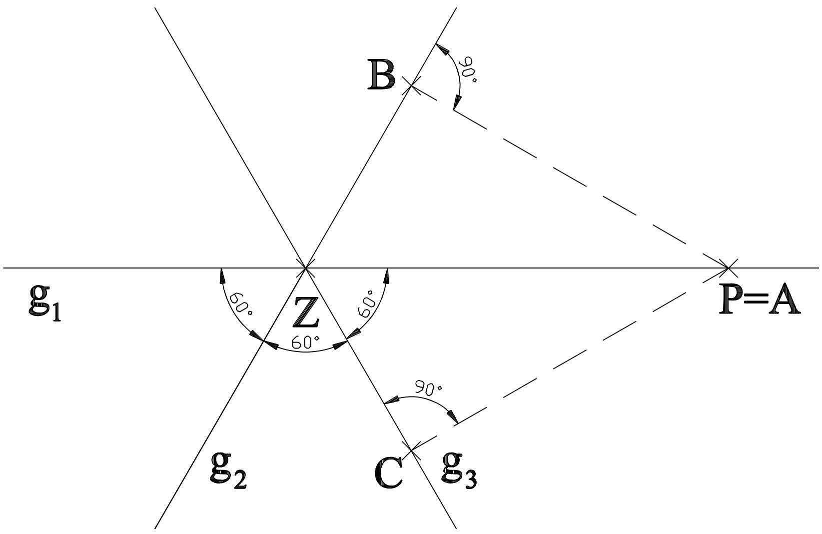
Winkelsummensatz. qed

Lotfußpunkte und Dreieck

Ein weiteres Mal verwenden wir bekannte Sätze für entdeckte Eigenschaften

Sonderfall:

Was passiert eigentlich, wenn der Punkt P auf einer der drei Geraden liegt?



Aufgaben:

Untersuche zunächst durch geeignete graphische Ergänzungen und Messungen, ob der zuvor erkannte Sachverhalt immer noch gültig zu sein scheint.

Versuche danach Beweise deiner Behauptungen im ersten Spezialfall und im verallgemeinerten Fall zu formulieren.