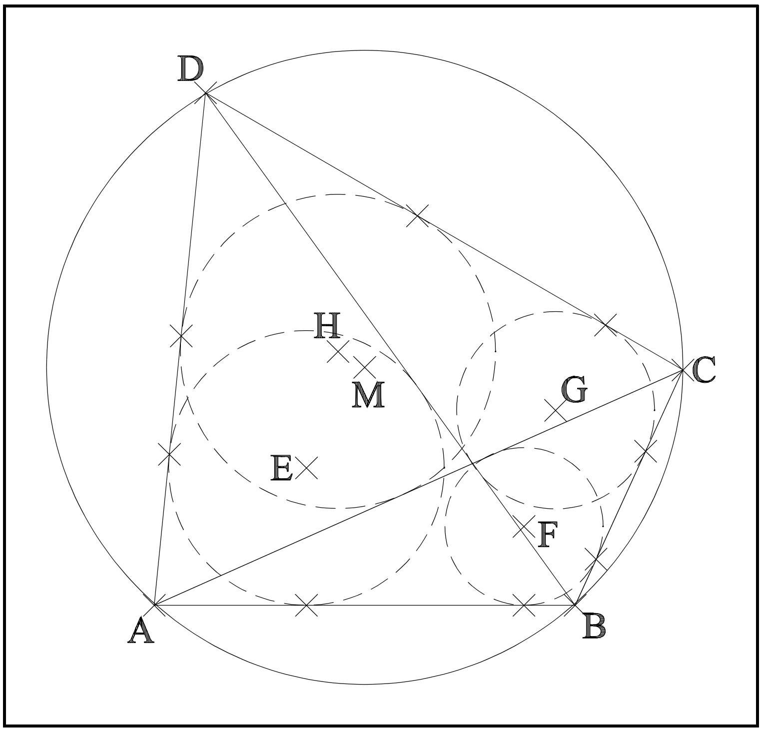
Sehnenviereck und vier Kreise

oder: ... ein Viereck kommt selten allein.

Zeichne in dein Heft einen Kreis und wähle auf dem Kreis vier Punkte, die damit ein Sehnenviereck definieren. Versuche Spezialfälle eines Sehnenvierecks zu vermeiden.



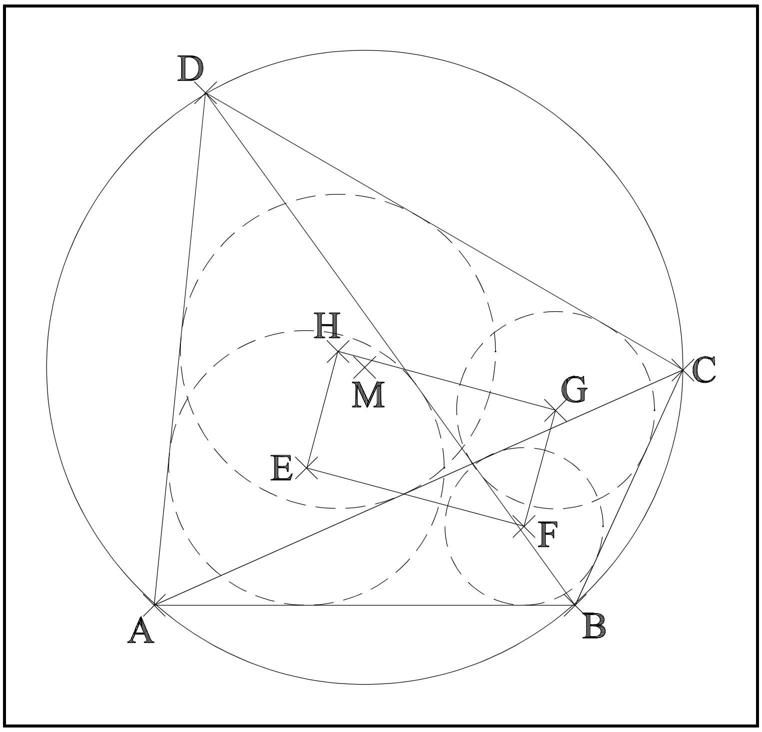
Jede der beiden Diagonalen des Vierecks teilt dieses in jeweils zwei Dreiecke, die einen Innenkreis besitzen. Konstruiere diese vier Innenkreise und benenne deren Mittelpunkte geeignet.

Untersuche die Gesamtfigur auf Besonderheiten.
Vergleiche deine Untersuchungsergebnisse mit denen deiner Nachbarn. Habt ihr gemeinsame Besonderheiten entdeckt?

Notiere auf jeden Fall Näherungswerte für die Radien deiner vier Kreise.

$r_E \approx$ $r_F \approx$ $r_G \approx$ $r_H \approx$

Nach meiner Graphik und den Messergebnissen erscheinen folgende Behauptungen gerechtfertigt:



a) Das Viereck □EFGH, gebildet aus den Mittelpunkten der vier Innenkreise, ist ein Rechteck.

b) Es gilt: $r_E + r_G = r_F + r_H$

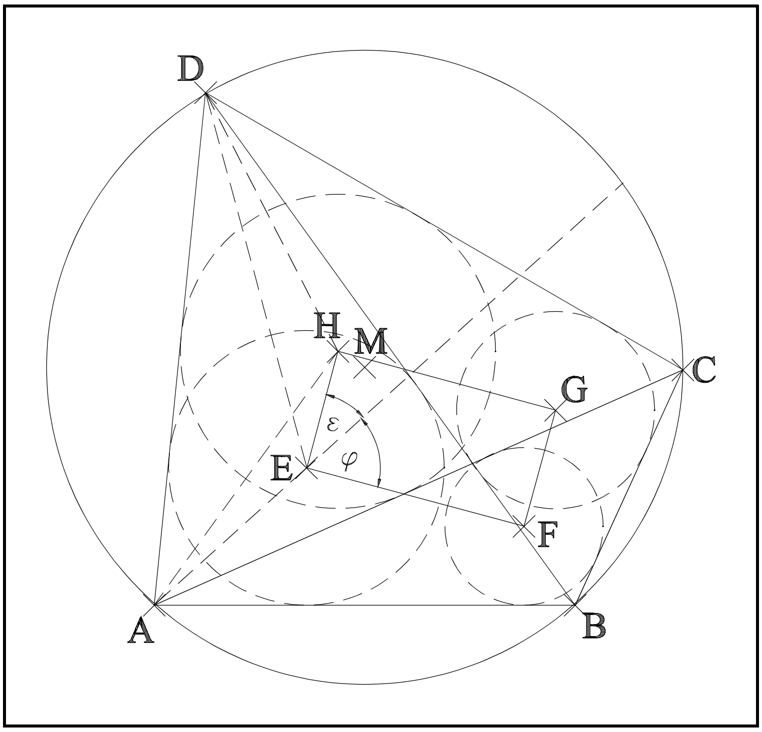
Nun, - bei Kreisen, Dreiecken, Viereck, Winkeln sind uns ja schon einige Sätze, auch aus Klassenstufe 7, bekannt.

Was besagte noch einmal der Umfangswinkelsatz und gab es da nicht einmal einen Zusammenhang von Winkeln bei einem Dreieck mit Innenkreis?

Sehnenviereck und vier Kreise

oder: ... ein Viereck kommt selten allein.

Die nebenstehende Graphik wurde durch einige Hilfslinien und Bezeichnungen ergänzt und wir konzentrieren uns im folgenden zunächst auf die Vierecksseite AD bzw. die beiden Dreiecke ΔABD und ΔACD.



<u>Aufgaben:</u>

Begründe die folgenden Beweisschritte.

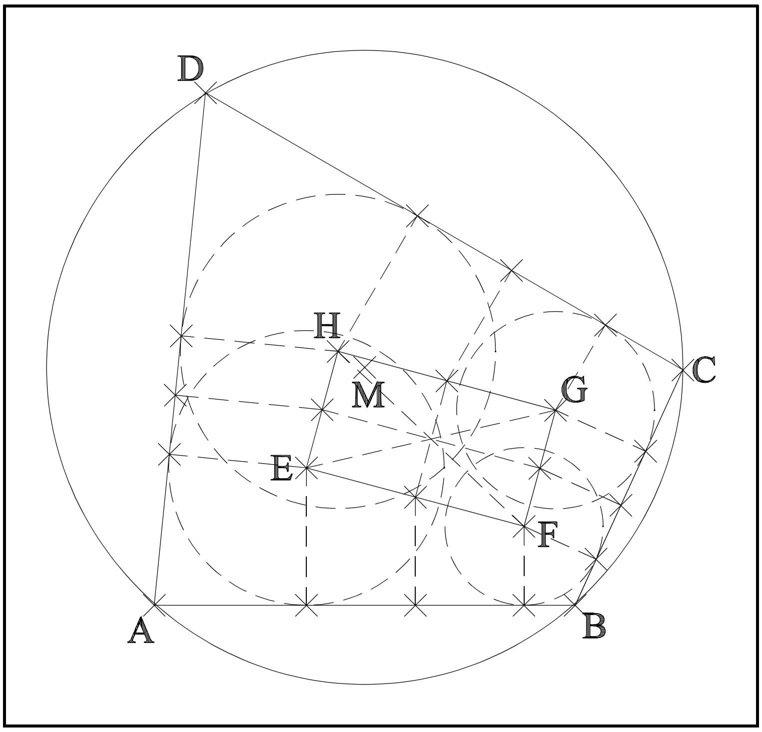
– $\overline{\sphericalangle DBA} = \overline{\sphericalangle DCA}$
– $\overline{\sphericalangle DEA} = \overline{\sphericalangle DHA}$
– □AEHD ist ein Sehnenviereck
– $\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\delta}$

Konzentriere dich nun auf die Vierecksseite AB bzw. die beiden Dreiecke ΔABC und ΔABD.

Ergänze die Skizze mit geeigneten Hilfslinien und gib zum Vorherigen entsprechende Beweisschritte und Begründungen an um zu zeigen: $\overline{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\beta}$. - Begründe: $\overline{\varepsilon} + \overline{\varphi} = 90°$.

<u>Hausaufgabe:</u> Notiere Beweisschritte um zu zeigen, dass $\overline{\sphericalangle HGF} = 90°$.

Um den Teil b) einzusehen, ist vielleicht die nebenstehende Skizze mit noch mehr Hilfslinien nützlich.



Trapeze, mittlere Höhen, Mittelparallelen, Diagonalen, ... ? - Zeichne eventuell weitere Hilfslinien ein.

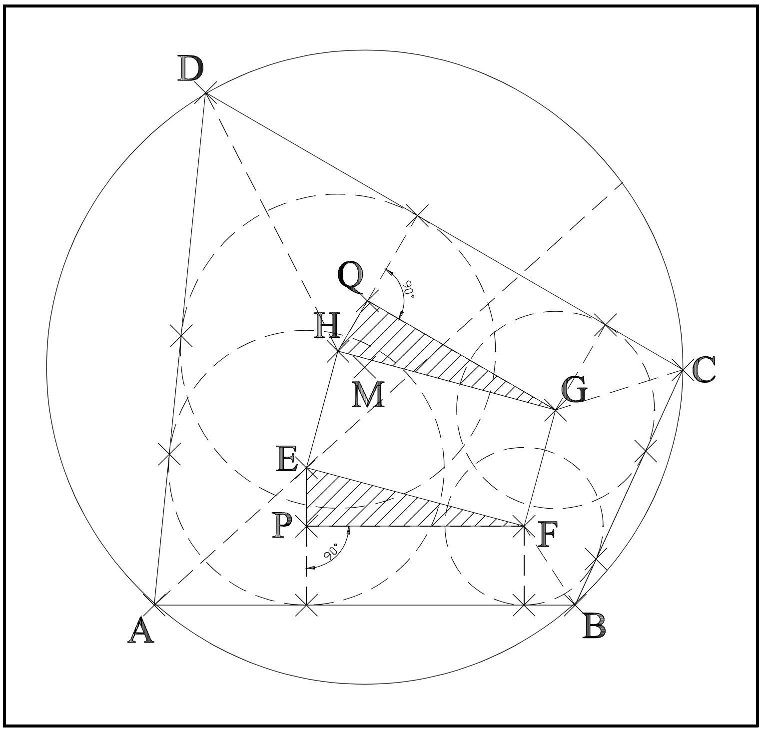
Wo sind denn noch einmal die einzelnen Radien?

Fällt dir nun eine vernünftige Begründung für b) ein?

Sehnenviereck und vier Kreise

oder: ... ein Viereck kommt selten allein.

Will man den Teil b) nicht nur plausibel einsehen, sondern einen stichhaltigen Beweis führen, so könnte man versuchen zu zeigen, dass die Dreiecke ΔPFE und ΔHGQ kongruent sind.



EF und HG sind gegenüberliegende Rechtecksseiten und damit gleich lang, und beide Dreiecke sind rechtwinklig.

<u>Aufgabe:</u>

Beweise unter Verwendung vorheriger Ergebnisse, dass gilt:

$$\overline{\sphericalangle EFP} = \frac{\overline{\beta}}{2} - \frac{\overline{\alpha}}{2}$$

$$\wedge \qquad \overline{\square QGH} = \frac{\overline{\gamma}}{2} - \frac{\overline{\delta}}{2}$$

und zeige, dass diese Winkelmaße bei einem Sehnenviereck gleich sind. - Insgesamt folgt nun, dass die Dreiecke ΔPFE und ΔHGQ kongruent sind, womit insbesondere die Strecken PE und HQ gleich lang sind.

$$\boxed{\overline{PE} = r_E - r_F = r_H - r_G = \overline{HQ} \quad \Rightarrow \quad r_E + r_G = r_H + r_F}$$

<u>Quelle:</u> http://www.agutie.com (Antonio Gutierrez)