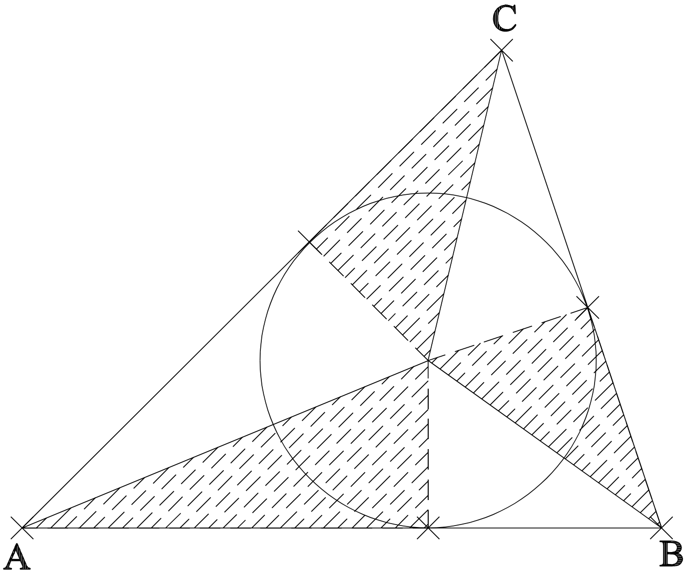
Seitenhalbierende und Flächeninhalt

In Klassenstufe 7 haben wir gezeigt, dass für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt:

$$\mathbf{A}_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{r}$$

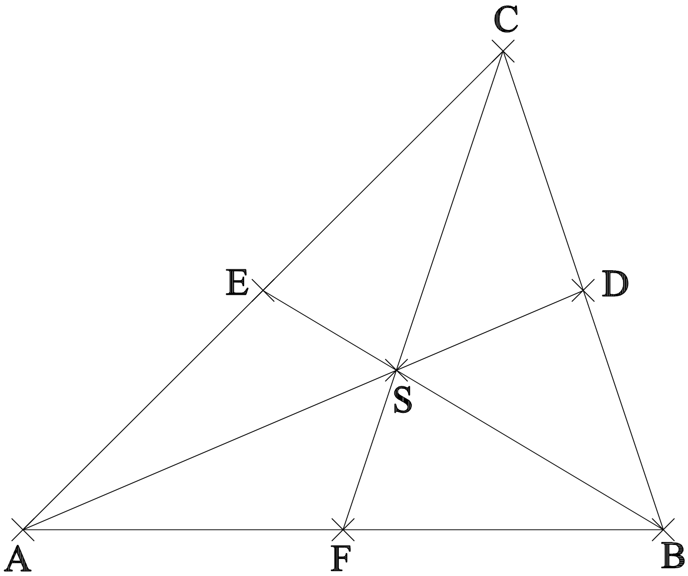
wobei **U** die Umfangslänge des Dreieckes ist und **r** der Radius des Innenkreises.

1) Beweise (zur Wiederholung) die obige Beziehung für den Flächeninhalt unter Verwendung der nebenstehenden Skizze. Füge geeignete Bezeichnungen für Punkte, Strecken und Winkel ein.



Wir wollen im folgenden untersuchen, ob es besondere Beziehungen zu entdecken gibt, wenn wir statt der Winkelhalbierenden im Dreieck die Seitenhalbierenden betrachten.

Auch die Seitenhalbierenden zerlegen das Dreieck in 6 Teildreiecke, die jedoch i.a. weder rechtwinklig sind noch über andere kongruente Winkel verfügen.



2) Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck (bitte nicht zu klein und keinen Spezialfall eines gleichschenkligen Dreiecks) und zeichne die 3 Seitenhalbierenden ein.

   Bestimme die (ungefähren) Flächeninhalte der 6 Teildreiecke durch möglichst genaue Messung der erforderlichen Größen unter Verwendung deines Taschenrechners. - Schon etwas entdeckt? - Vergleiche mit den Ergebnissen deiner Nachbarn.

Es scheint so zu sein, als ob alle 6 Teildreiecke gleich groß sind (womit wiederum eine sinnvolle Begründung dafür geliefert wäre, dass S auch Schwerpunkt des Dreiecks genannt wird).

3) Begründe die folgenden Gleichungen:[1]

   a) $\Delta AFS = \Delta FBS$ $\quad$ $\Delta BDS = \Delta DCS$ $\quad$ $\Delta CES = \Delta EAS$

   b) $\Delta AFC = \Delta FBC$ $\quad$ $\Delta BDA = \Delta DCA$ $\quad$ $\Delta CEB = \Delta EAB$

---

[1] Die Gleichheit der Dreiecke meint im folgenden stets die Gleichheit der **Flächeninhalte** der Dreiecke.

c) $\Delta AFC = \Delta AFS + 2 \cdot \Delta EAS = \Delta AFS + 2 \cdot \Delta BDS \quad \Rightarrow \quad \Delta EAS = \Delta BDS$

$\Delta BDA = \Delta BDS + 2 \cdot \Delta FBS = \Delta BDA + 2 \cdot \Delta CES \quad \Rightarrow \quad \Delta FBS = \Delta CES$

$\Delta CEB = \Delta CES + 2 \cdot \Delta DCS = \Delta CES + 2 \cdot \Delta AFS \quad \Rightarrow \quad \Delta DCS = \Delta AFS$

Nun kommen noch zwei schöne Folgerungen, wovon dir die erste jedoch schon bekannt sein müsste (doch es ist verblüffend, wie wir dies aus den Flächeninhalten erschließen können).

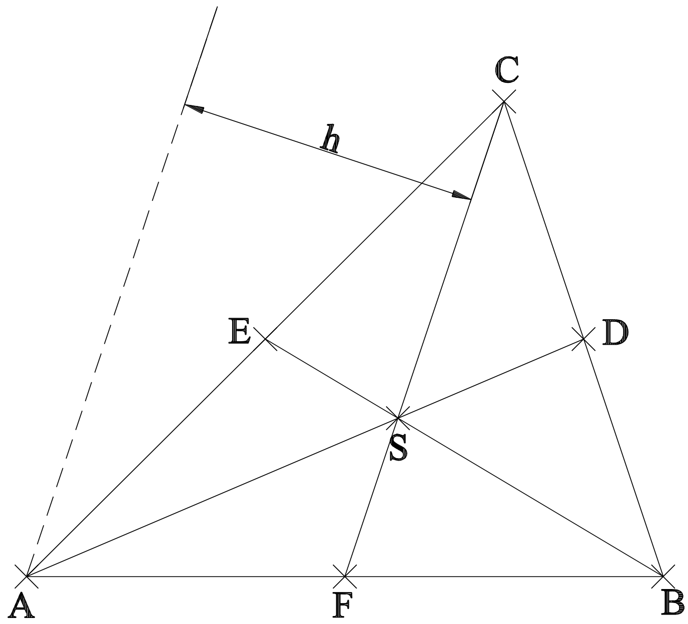
4) Begründe:

$$\Delta SCA = 2 \cdot \Delta FSA$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{SC} \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{FS} \cdot h$$

$$\overline{SC} = 2 \cdot \overline{FS}$$

S teilt die Seitenhalbierende $\mathbf{s_c}$ im Verhältnis 1 : 2.



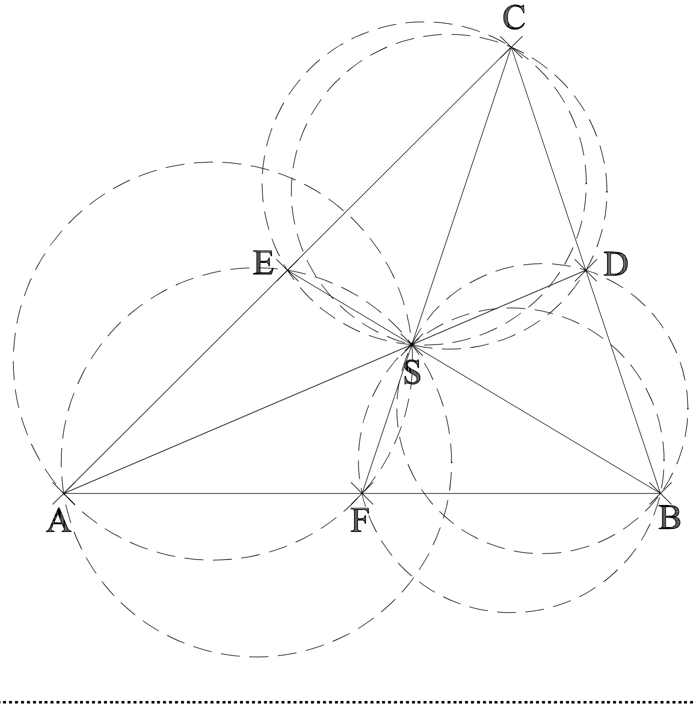
Notiere entsprechende Beweisschritte für die anderen beiden Seitenhalbierenden und untersuche (als Hausaufgabe) den entsprechenden Sachverhalt für ein stumpfwinkliges Dreieck (Haben wir irgendwo benötigt, dass das Dreieck spitzwinklig war?).

---

5) Zeichne um die 6 flächengleichen Teildreiecke die zugehörigen Außenkreise, die natürlich alle durch den Punkt **S** verlaufen.

Versuche, mit möglichst wenigen Hilfslinien auszukommen.

Untersuche wiederum die Figur auf Besonderheiten und vergleiche mit den Ergebnissen der Nachbarn. - Schon etwas entdeckt?

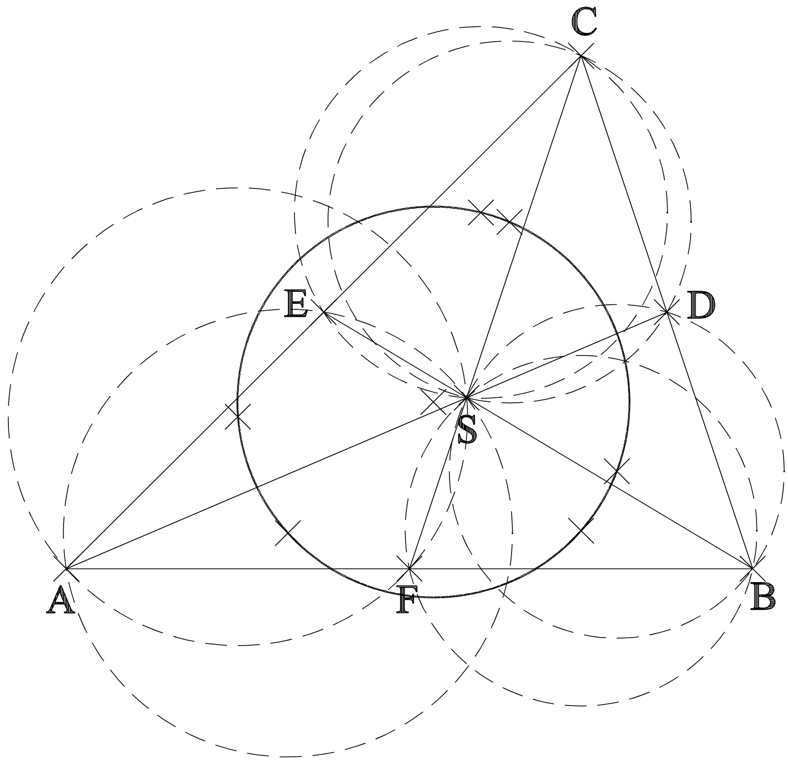


Seitenhalbierende und Flächeninhalt

Wie hübsch! - Die Mittelpunkte der Umkreise der 6 flächengleichen Teildreiecke liegen offensichtlich auf einem Kreis.[2]

Dieser Kreis heißt Lamoenkreis (nach dem Holländer Floor van Lamoen).

Zum Beweis würden wir etwas mehr Geometriekenntnisse benötigen, deshalb begnügen wir uns in dieser Klassenstufe mit dem schönen graphischen Ergebnis.



2 Übrigens kann man auch einige parallele und senkrechte Strecken im Zusammenhang mit den 6 Außenkreisen entdecken.