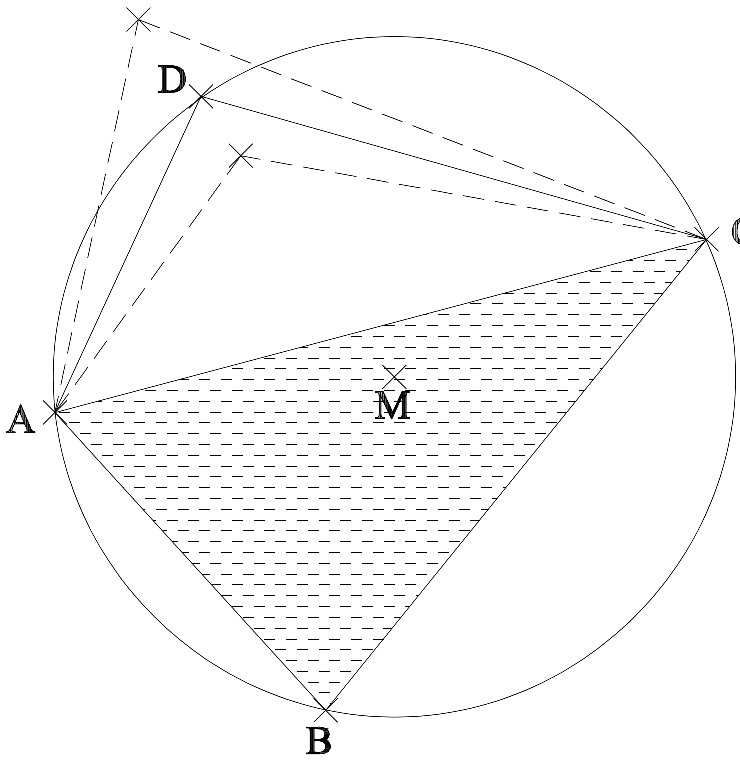
Viereck und Kreis

Gibt es da etwas Besonderes zu entdecken?

Bekanntlich besitzt ein Dreieck einen Umkreis, dessen Mittelpunkt man konstruieren kann.



1) Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck und konstruiere den Außenkreis des Dreieckes nur mit Zirkel und Lineal.

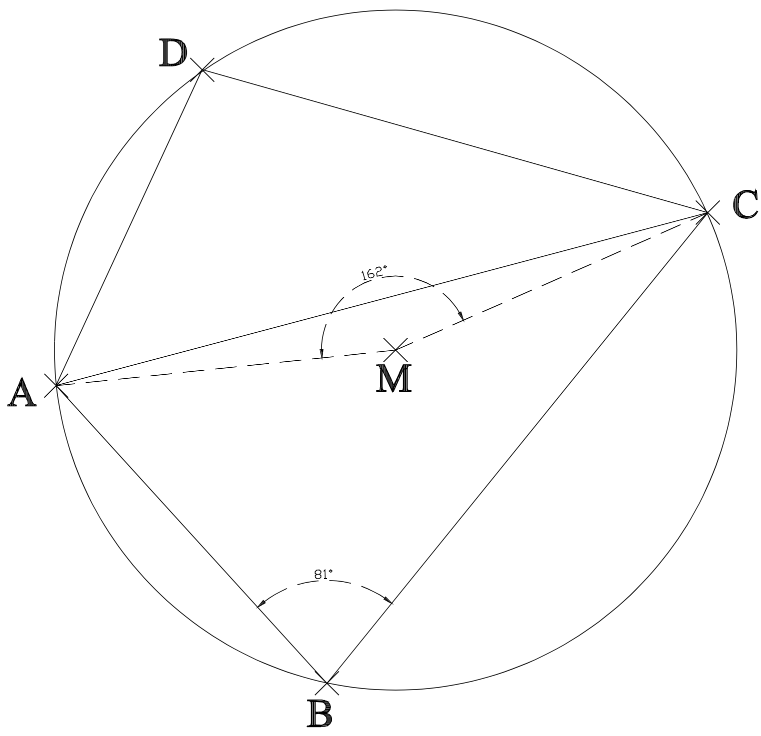
Bei einem Viereck findet man im allgemeinen keinen Außenkreis, der durch alle 4 Eckpunkte verläuft, denn durch 3 (nichtkollineare) Punkte ist ein Kreis ja schon eindeutig definiert und dass der vierte Punkt auf diesem Kreis liegt, ist sicher ein Spezialfall.

Was ist das Besondere eines solchen Viereckes? - Woran kann man bei einem Viereck erkennen, dass ein Umkreis existieren muss?

2) Wähle auf dem Umkreis deines Dreieckes einen vierten Punkt (D) und miss für dieses Viereck □ABCD alle Seitenlängen und Winkelgrößen. Miss auch die Längen der beiden Diagonalen. - Schon etwas entdeckt? - Was haben die Nachbarn herausgefunden?

....

Die Winkel β und δ kann man sicher als Umfangswinkel über der Diagonalen AC auffassen.



3) Begründe, dass gilt:

$$\overline{\beta} + \overline{\delta} = 180^\circ .$$

Was passiert, wenn die Diagonale durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft?
Wie hieß doch gleich der Satz: “Der Umfangswinkel am Kreis über einem Durchmesser ist ....”?

4) Ergänze und begründe:

$$\overline{\alpha} + \overline{\gamma} =$$

....

Viereck und Kreis

Gibt es da etwas Besonderes zu entdecken?

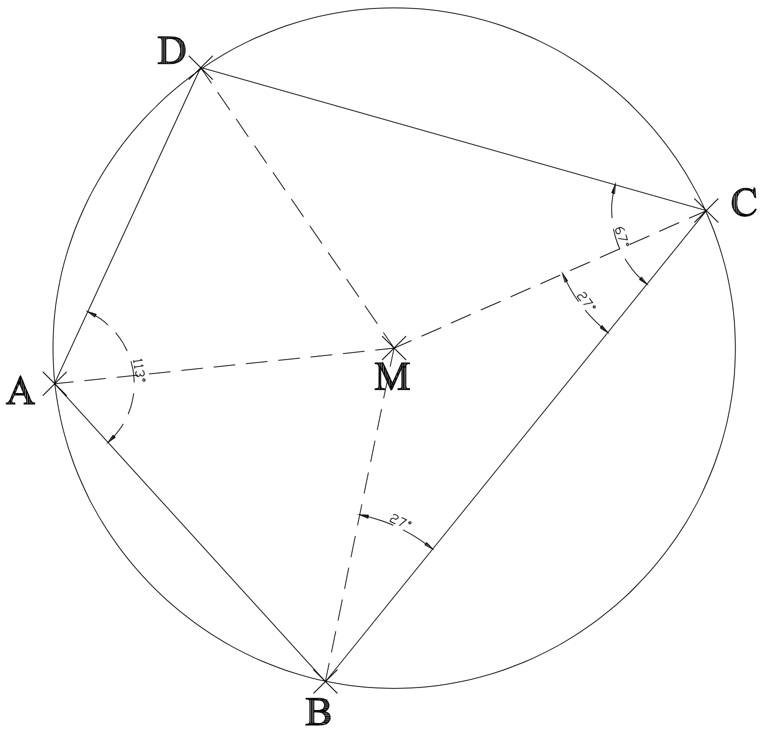
Wir wissen, dass jeder Kreispunkt den gleichen Abstand zum Mittelpunkt hat.

5) Zeichne ein neues (beliebiges) Sehnenviereck □ABCD in einen Kreis. Die 4 Abstände der Eckpunkte zum Mittelpunkt M des Umkreises zerlegen das Viereck in 4 Dreiecke.

   Beweise mit Hilfe des Basiswinkelsatzes für gleichschenklige Dreiecke und dem Winkelsummensatz für Vierecke:

   $$\overline{\alpha} + \overline{\gamma} = 180°$$

   $$\overline{\beta} + \overline{\delta} = 180°$$



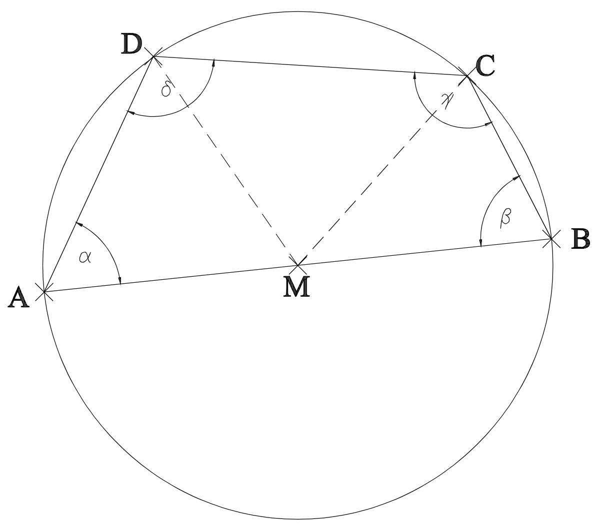
6) Es sei: $\overline{\alpha} := 75° \;\wedge\; \overline{\gamma} := 105°$.

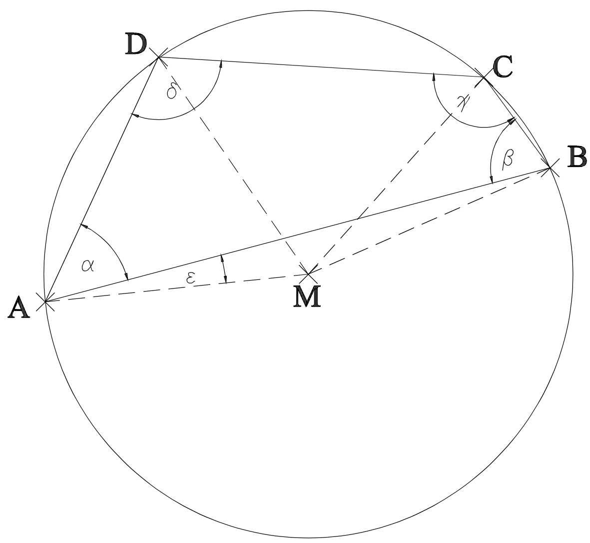
   Zeichne ein (nicht zu kleines) Viereck □ABCD mit diesen beiden Maßen. Konstruiere danach den Außenkreis dieses Viereckes.

Was passiert eigentlich, wenn der Kreismittelpunkt nicht innerhalb des Sehnenviereckes liegt?

<u>Hausaufgabe:</u> Zeige, dass auch in den beiden unten dargestellten Fällen eines Sehnenviereckes gilt:

$$\overline{\alpha} + \overline{\gamma} = 180° \quad \text{und} \quad \overline{\beta} + \overline{\delta} = 180° .$$

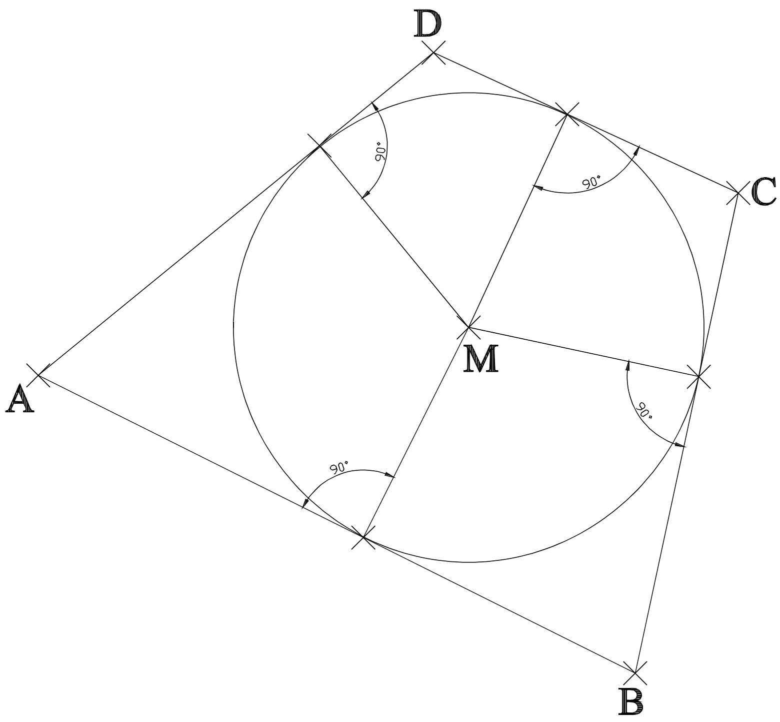




Viereck und Kreis
Gibt es da etwas Besonderes zu entdecken?

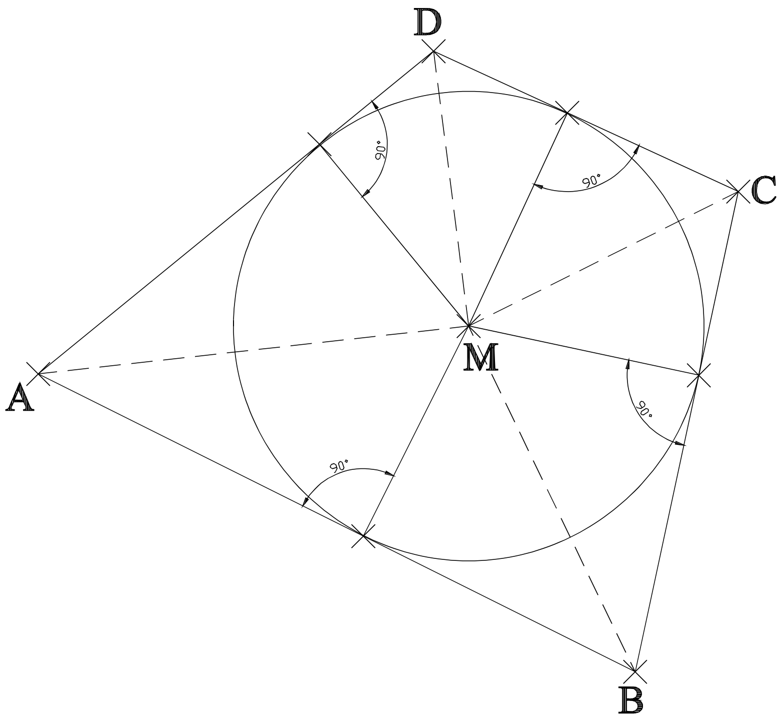
Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, wann ein Viereck einen Innenkreis besitzt.

Wir konstruieren zunächst einmal ein Tangentenviereck, das ja per Konstruktion den Kreis als Innenkreis besitzt.



7) Konstruiere einen Kreis und wähle 4 (beliebige) Kreispunkte, die als Tangentenberührpunkte fungieren sollen. Achte darauf, dass dein Tangentenviereck noch gut auf das Zeichenblatt passt.

   Miss nun bei dem Tangentenviereck □ABCD die Seitenlängen und Winkelgrößen. Miss auch die Längen der beiden Diagonalen.
   Schon etwas entdeckt? - Was haben die Nachbarn herausgefunden?



8) Beweise:

   Die 4 Kreisradien vom Mittelpunkt M zu den Berührpunkten der Tangenten zerlegen das Tangentenviereck in 4 rechtwinklige Drachenvierecke.

   Kennzeichne die 4 Berührpunkte geeignet und begründe:

   $$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

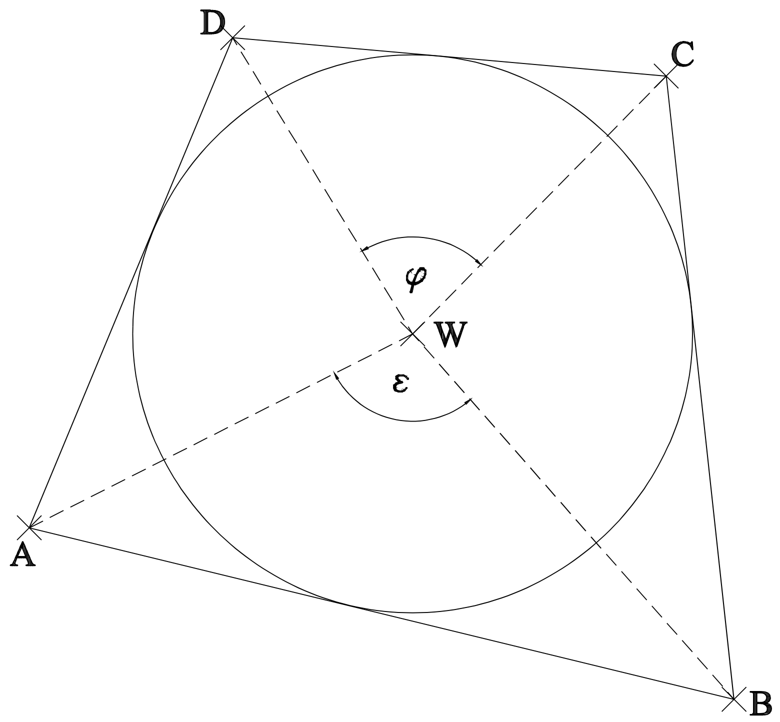
Viereck und Kreis
Gibt es da etwas Besonderes zu entdecken?

9) Beweise:

Bei einem Tangentenviereck ergibt die Summe der Winkelmaße zweier gegenüberliegender Winkel am Mittelpunkt des Innenkreises stets 180°, d.h.

$$\overline{\varepsilon} + \overline{\varphi} = 180°$$

Ergänze die Figur durch geeignete Hilfslinien und Bezeichnungen.



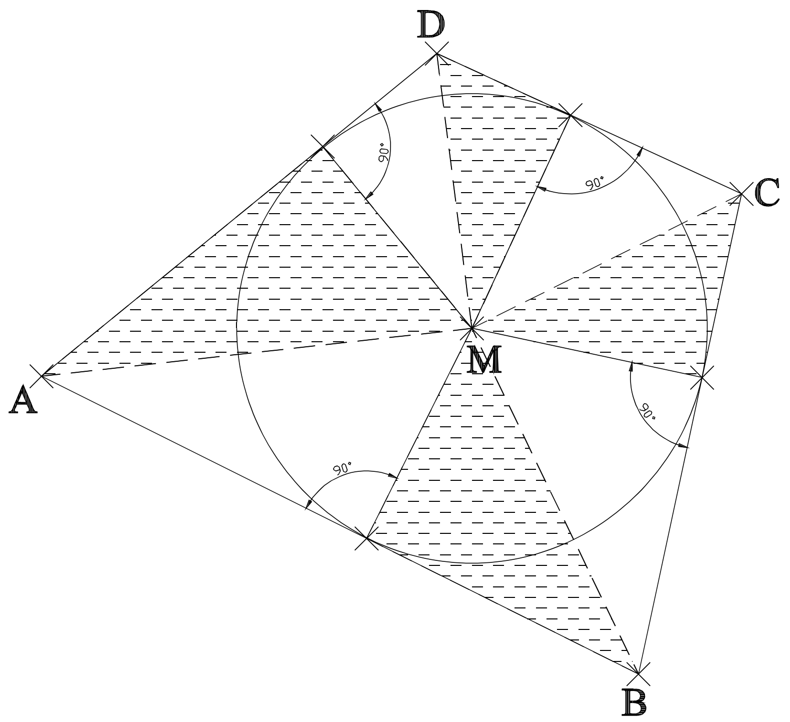
<u>Hausaufgabe:</u>

Konstruiere ein möglichst großes Tangentenviereck auf einem Blatt weißen Papiers, und schneide es aus.

Zerschneide nun dieses Viereck weiter in 4 Drachenvierecke und wiederum jedes Drachenviereck entlang der Spiegelachse, so dass du zuletzt 8 Dreiecke erhältst.

Lege nun diese acht Dreiecke zu <u>einem</u> Rechteck zusammen und klebe dieses Rechteck in dein Heft.

Gib Länge, Breite und den Flächeninhalt dieses Rechteckes an!



Viereck und Kreis

Gibt es da etwas Besonderes zu entdecken?

10) Beweise: Für den Flächeninhalt eines Tangentenviereckes gilt: $\mathbf{A}_{\square} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{r_i}$

(U: Umfangslänge; r_i: Radius des Innenkreises)

11) Entscheide, welche Vierecke einen Umkreis oder einen Innenkreis besitzen: Trapez; Drachen; achsensymmetrisches Trapez; Parallelogramm; Raute; Rechteck; Quadrat.

12) Gegeben ist eine Raute mit: $\overline{AC} := 8\,\text{cm}\ ;\ \ \overline{BD} = 6\,\text{cm}.$

Konstruiere diese Raute und berechne den Radius des Innenkreises. - Überprüfe deine Rechnung durch Konstruktion des Kreises.

13) Zeige: $\mathbf{A}_{\square} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{r_i}$

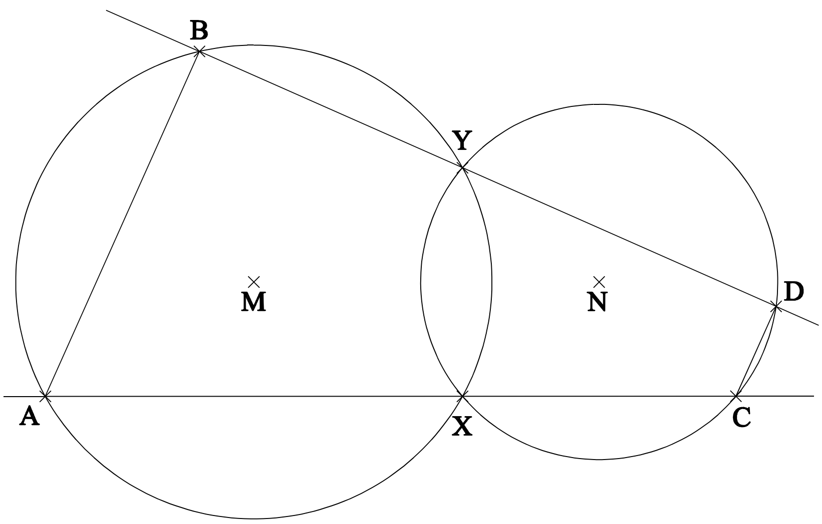
gilt für jedes Tangenten<u>viel</u>eck eines Kreises. - Was ergibt sich im Spezialfall, wenn das Tangentenvieleck

- ein regelmäßiges Sechseck,
- ein regelmäßiges Dreieck

ist?

14) Zeichne Kreise $\mathbf{k_1}(M;r_1)$ und $\mathbf{k_2}(N;r_2)$ mit $\overline{MN} < r_1 + r_2$ und benenne die beiden Schnittpunkte mit X und Y.
Wähle eine Sehne AB von k_1. Die Geraden g(A;X) und g(B;Y) schneiden k_2 in den Punkten C und D.

Beweise: **AB ∥ CD**



Viereck und Kreis

Gibt es da etwas Besonderes zu entdecken?

Nachtrag für besonders Interessierte:

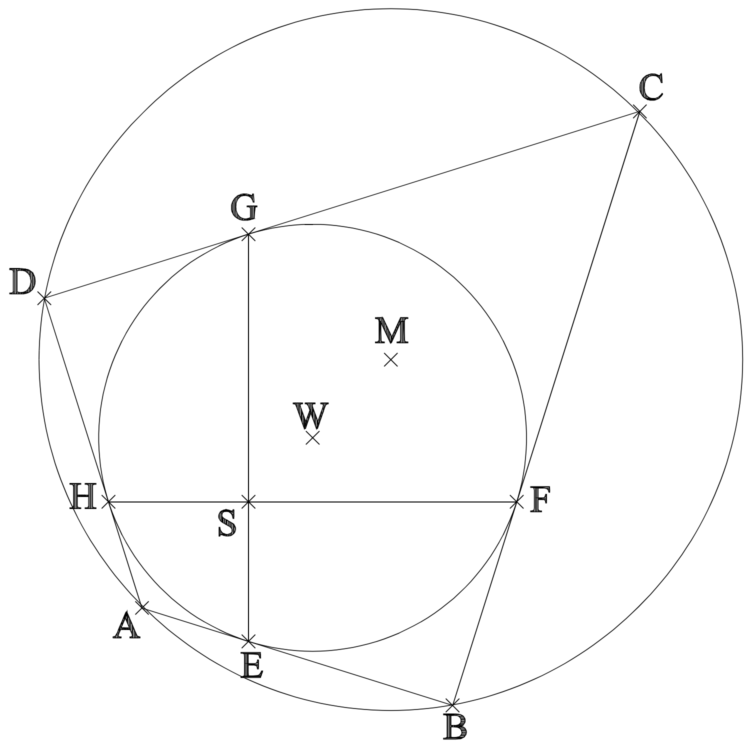
Ein Sehnen-Tangenten-Viereck ist ein Viereck, das sowohl einen Innen- als auch einen Außenkreis besitzt.

Im Allgemeinen sind die Mittelpunkte der beiden Kreise verschieden.

Versuche zu beweisen:
Wenn ein Viereck ein Sehnen-Tangenten-Viereck ist, dann stehen die Verbindungsstrecken der gegenüberliegenden Berührpunkte des Innenkreises an die Vierecksseiten senkrecht aufeinander, d.h.:

$$\mathbf{HF} \perp \mathbf{EG} \,.$$

Erinnere dich an alle Eigenschaften, die ein solches Viereck besitzen muss, und ergänze die Figur eventuell durch geeignete Hilfslinien und Bezeichnungen.

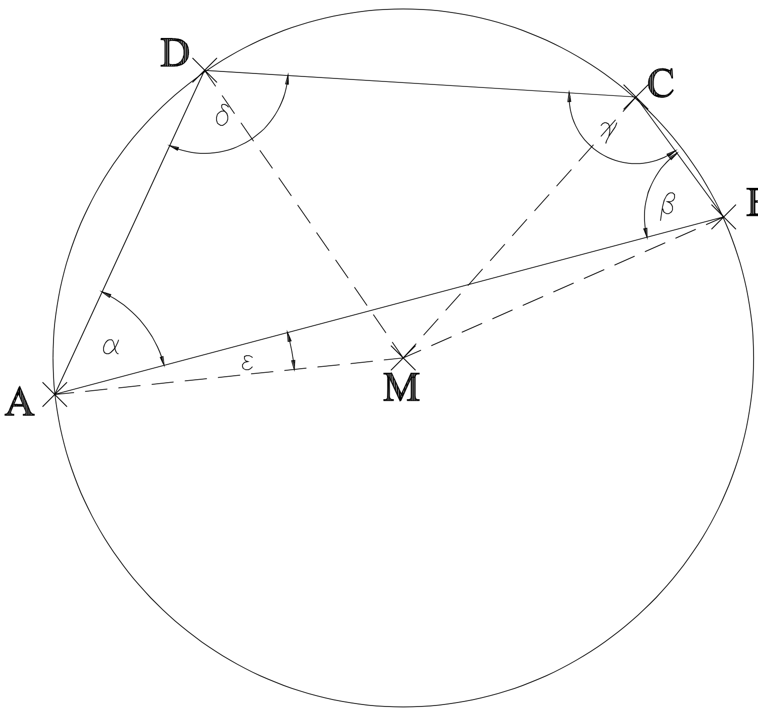


Viereck und Kreis

Gibt es da etwas Besonderes zu entdecken?

Lösungsskizze einer Hausaufgabe:

Es gilt: $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} + \overline{\delta} = 360°$



und nach Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke weiterhin:

$$\overline{\gamma_1} = \overline{\delta_2}$$
$$\overline{\gamma_2} = \overline{\beta} + \overline{\varepsilon}$$
$$\overline{\alpha} = \overline{\delta_1} - \overline{\varepsilon}$$

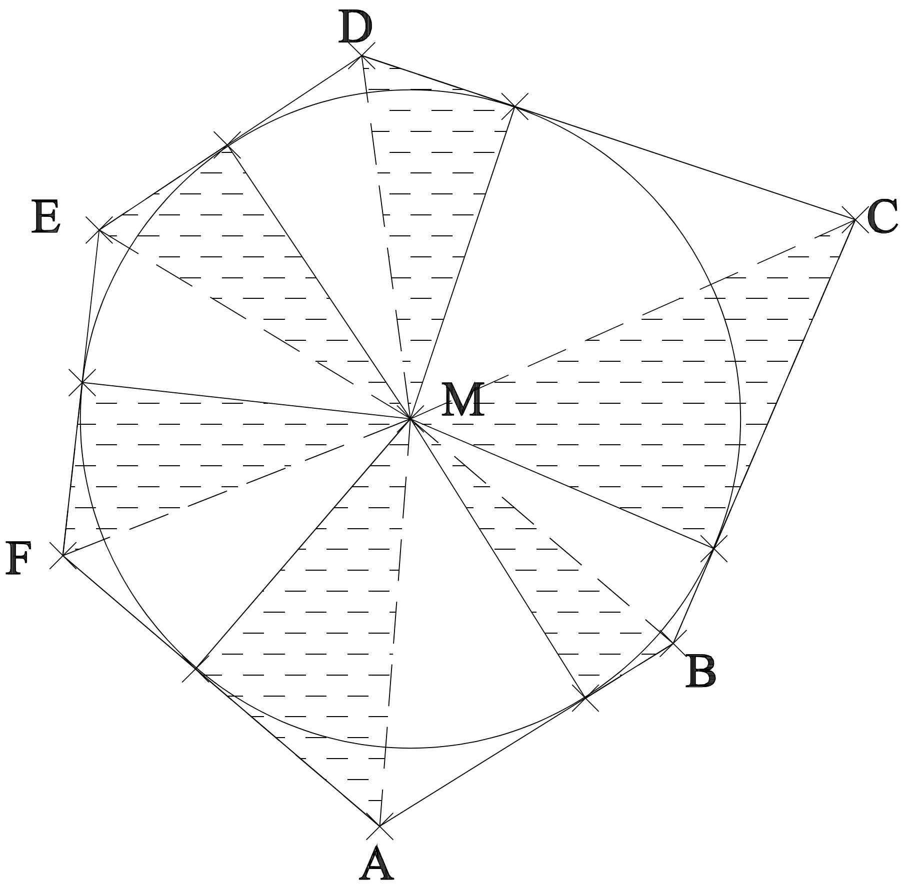
Nach Einsetzen in die Winkelsummensatzgleichung:

$$2 \cdot \overline{\beta} + 2 \cdot \overline{\delta} = 360°$$
$$\overline{\beta} + \overline{\delta} = 180°$$

zu 13)

Beispiel:

Tangentensechseck

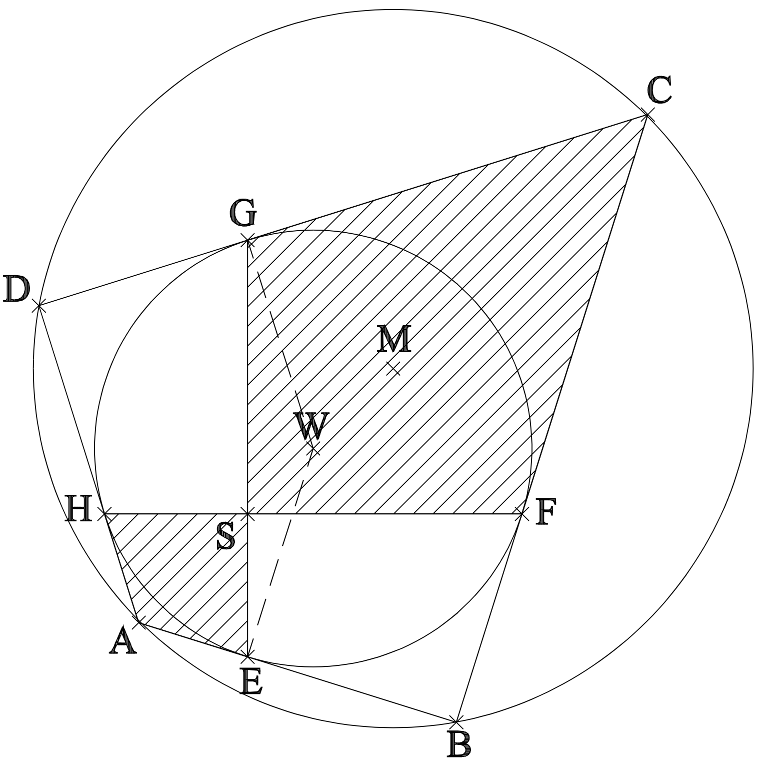


Jeder der 6 rechtwinkligen Drachen ergibt ein Rechteck mit der Breite: halbe Sehnenlänge, und der Höhe: Radius des Innenkreises.

Die 6 Rechtecke zusammengefügt (mit gleicher Höhe!) ergibt ein Rechteck mit einer Rechtecksbreite von halber Umfangslänge.

Lösungsskizze zum Nachtrag für besonders Interessierte:

Die Summe der Winkelmaße in den schraffierten Vierecken (□AESH und □CGSF) beträgt jeweils 360°, d.h. die 8 Winkel der beiden Vierecke zusammen haben zusammen das Maß: 720°.



Jeweils 3 Paare dieser 8 Winkel haben zusammen das Maß 180°:

1. $\overline{\sphericalangle EAH} + \overline{\sphericalangle GCF} = 180°$
   (Sehnenviereckseigenschaft)

2. $\overline{\sphericalangle SEA} + \overline{\sphericalangle SGC} = 180°$
   weil $\overline{\sphericalangle BES} = \overline{\sphericalangle SGC}$
   (da diese Winkel aus jeweils einem rechten Winkel und einem Basiswinkel bestehen - Tangentenviereckseigenschaft)

3. $\overline{\sphericalangle AHS} + \overline{\sphericalangle CFS} = 180°$
   (Begründung wie 2.)

Damit haben die restlichen 2 der 8 Winkel zusammen auch das Maß von 180°, und da sie Scheitelwinkel am Scheitelpunkt S sind müssen sie gleich groß sein.

$$\boxed{\overline{\sphericalangle HSE} = \overline{\sphericalangle FSG} = 90°}$$