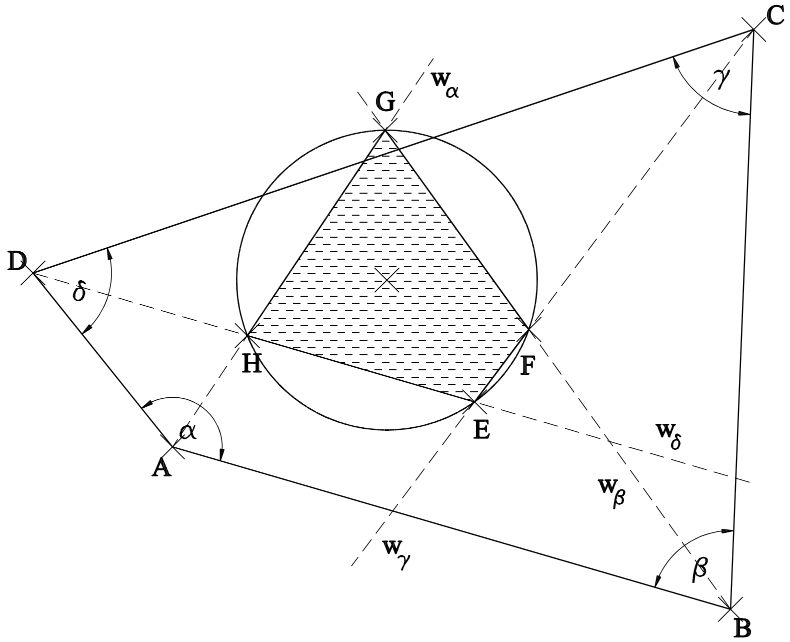
Sehnenviereck und Winkelhalbierende

oder, ... ein verblüffender Spezialfall

Was wir schon gelernt haben:

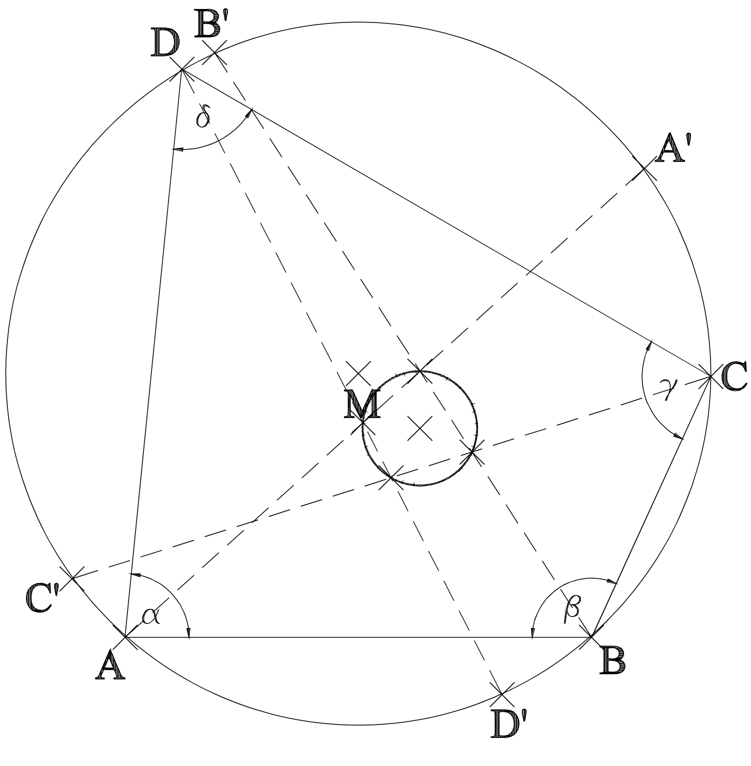


Die paarweisen Schnittpunkte der vier Winkelhalbierenden eines allgemeinen Vierecks bilden ein neues Viereck, und dieses Viereck ist ein Sehnenviereck.

Wir wollen nun mit den Winkelhalbierenden eines Vierecks ein wenig weiter „experimentieren“. Dabei gehen wir diesmal von einem Sehnenviereck aus.

Zeichne in dein Heft einen Kreis und wähle auf diesem Kreis vier Punkte, die unser Sehnenviereck □ABCD definieren sollen (versuche Spezialfälle von Vierecken zu vermeiden).

Konstruiere nun die vier Winkelhalbierenden dieses Sehnenvierecks.



1. Dass die paarweisen Schnittpunkte der vier Winkelhalbierenden wiederum ein Sehnenviereck bilden, ist besonders einfach zu begründen, nicht wahr?

Man könnte für dieses einbeschriebene Sehnenviereck wiederum Winkelhalbierende konstruieren, die paarweisen Schnittpunkte bilden wiederum ein Sehnenviereck, man könnte wieder Winkelhalbierende ....

Gedanklich könnten wir den Vorgang beliebig fortsetzen, aber jetzt wollen wir uns einmal die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit dem Ausgangskreis ansehen!
Benenne diese vier Punkte mit A‘, B‘, C‘ und D‘ und untersuche, ob das Viereck, gebildet aus diesen Punkten, eine besondere Eigenschaft hat. Vergleiche mit den Ergebnissen der Nachbarn. Schon etwas entdeckt?

....

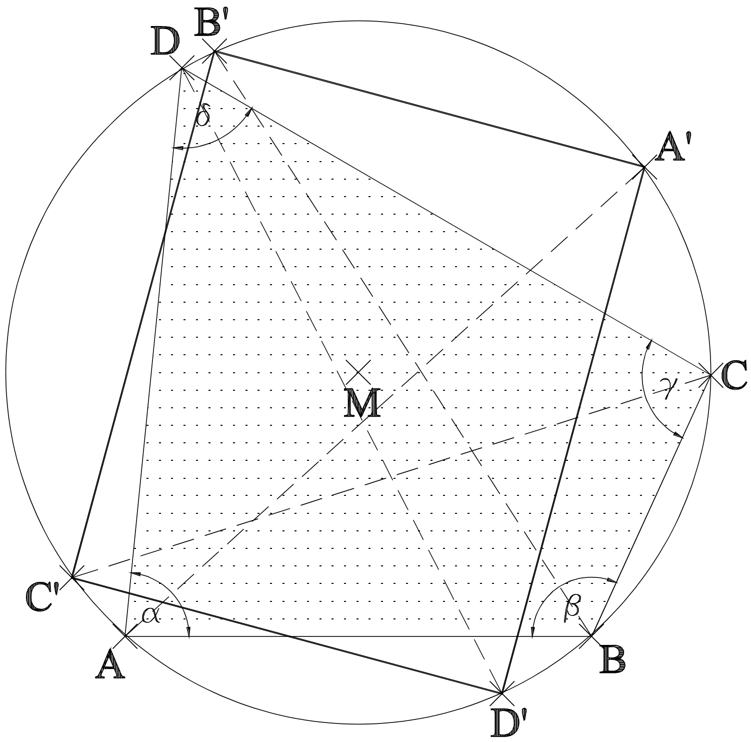
2. Um später eine Beweisidee der Vermutung zu erleichtern ist es sicher sinnvoll, die bestimmenden Größen der Konstruktion zu messen. Also: Bestimme alle Maße von Winkeln und Strecken, die dir wichtig und sinnvoll erscheinen. Erinnere dich dabei an wesentliche Besonderheiten eines Sehnenvierecks.

....

Sehnenviereck und Winkelhalbierende

oder, ... ein verblüffender Spezialfall

Erstaunlich! - Das Viereck □A‘B‘C‘D‘ scheint ein Rechteck zu sein! - Doch wie soll man das beweisen?



3. Begründe:

$$\frac{\overline{\alpha}}{2} + \frac{\overline{\gamma}}{2} = 90^\circ$$

$$\wedge \quad \frac{\overline{\beta}}{2} + \frac{\overline{\delta}}{2} = 90^\circ$$

Untersuche, ob diese halben Winkelgrößen in der Figur noch an anderer Stelle auftauchen.

Es gilt:

$$\boxed{\overline{\sphericalangle D'C'C} = \frac{\overline{\delta}}{2}}$$

wegen des Umfangswinkelsatzes über der Sehne D‘C. Kennzeichne die zugehörigen Winkel in deiner Skizze mit gleicher Farbe.

4. Begründe:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \overline{\sphericalangle CC'B'} = \frac{\overline{\beta}}{2} \\ \wedge & \overline{\sphericalangle D'C'B'} = 90^\circ \\ \wedge & \overline{\sphericalangle B'A'D'} = 90^\circ \end{array}}$$

Sind wir jetzt eigentlich schon fertig? - Genügt es zu wissen, dass das Viereck zwei gegenüberliegende rechte Winkel besitzt?

5. Begründe:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \overline{\sphericalangle DD'C'} = \frac{\overline{\gamma}}{2} \\ \wedge & \overline{\sphericalangle A'D'D} = \frac{\overline{\alpha}}{2} \\ \wedge & \overline{\sphericalangle A'D'C'} = 90^\circ \\ \wedge & \overline{\sphericalangle C'B'A'} = 90^\circ \end{array}}$$

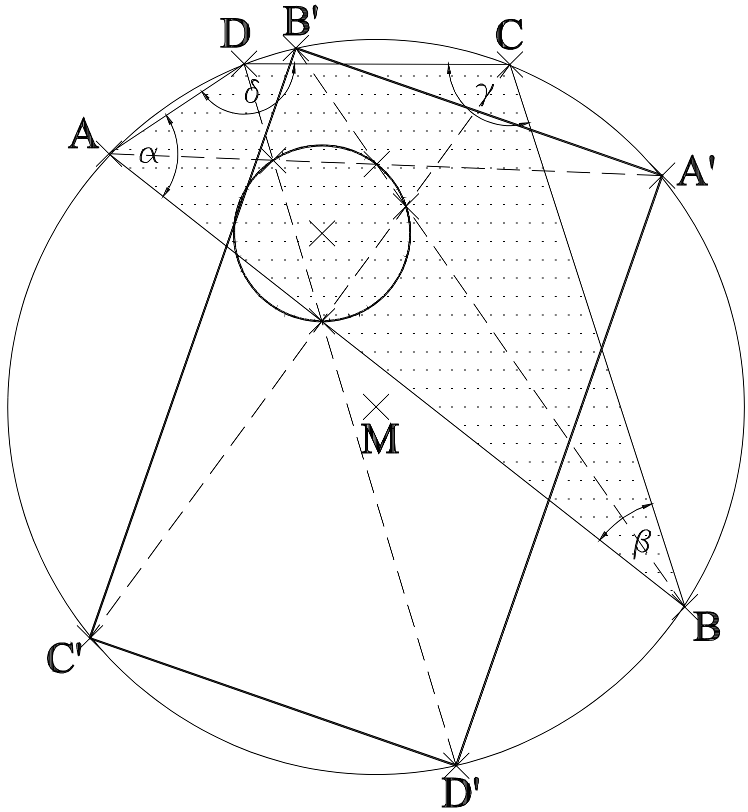
Sehnenviereck und Winkelhalbierende

oder, ... ein verblüffender Spezialfall

Hausaufgabe:

Zeichne ein Sehnenviereck, bei dem der Mittelpunkt des Umkreises außerhalb des Vierecks liegt.

Überprüfe konstruktiv, dass das Viereck, gebildet aus den Schnittpunkten der vier Winkelhalbierenden mit dem Außenkreis wiederum ein Rechteck ist.



Ein Sonderfall:

6. Könnte es passieren, dass das Originalsehnenviereck und das Bildrechteck identisch sind?

   Wenn man im rechts skizzierten Sonderfall für das einbeschriebene Sehnenviereck nun wiederum ein einbeschriebenes Sehnenviereck konstruiert, wie sieht dieses weitere Sehnenviereck aus?