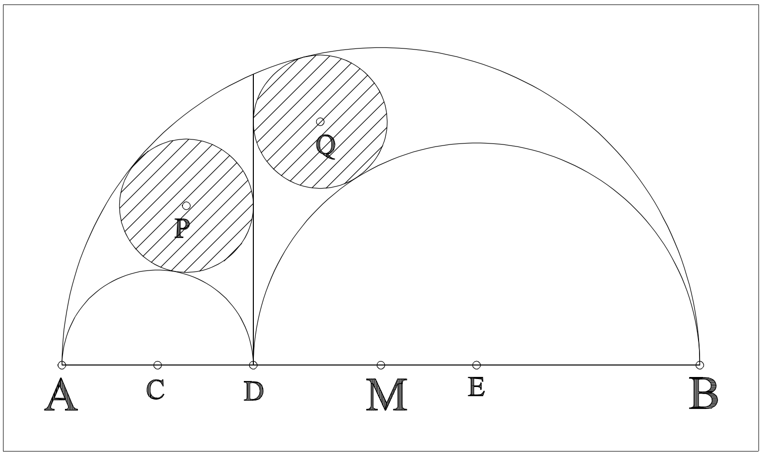
Arbelos

Kreisberechnung - Bögen und Kreise II



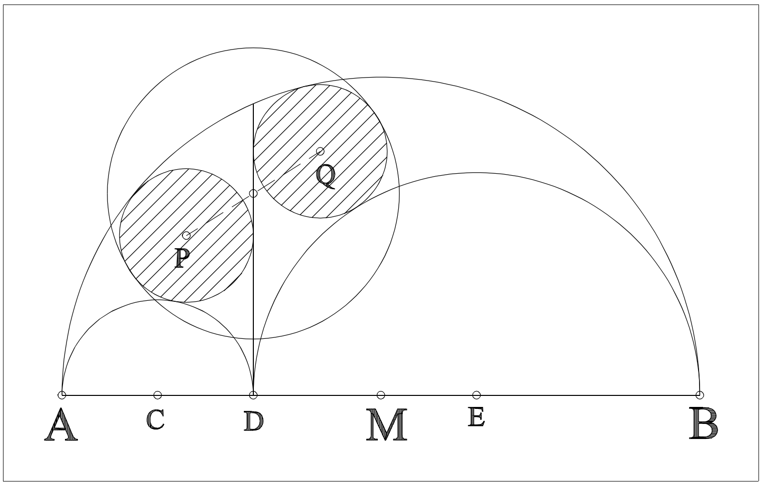
ZWILLINGE

des Archimedes

Zeige:
Die schraffierten Kreise sind gleich groß.
Berechne konkret den Radius **z** dieser 2 Kreise für den Fall:

$$\mathbf{R} := \overline{EB} = 7\,\text{cm}$$
$$\mathbf{r} := \overline{AC} = 3\,\text{cm}$$

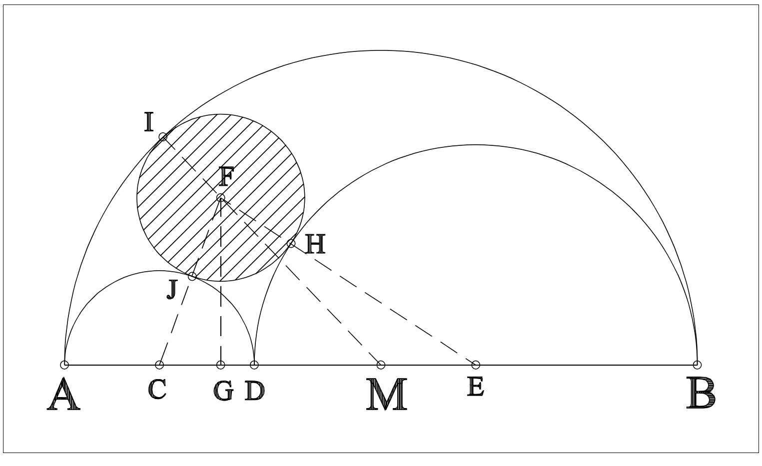
Konstruiere die nebenstehende Figur mit diesen Maßen.



Zeige:
Der Berührkreis um die Zwillingskreise des Archimedes besitzt den gleichen Flächeninhalt wie die (Doppel-) Sichel (Arbelos).

APOLLONIUS

(schwieriger)



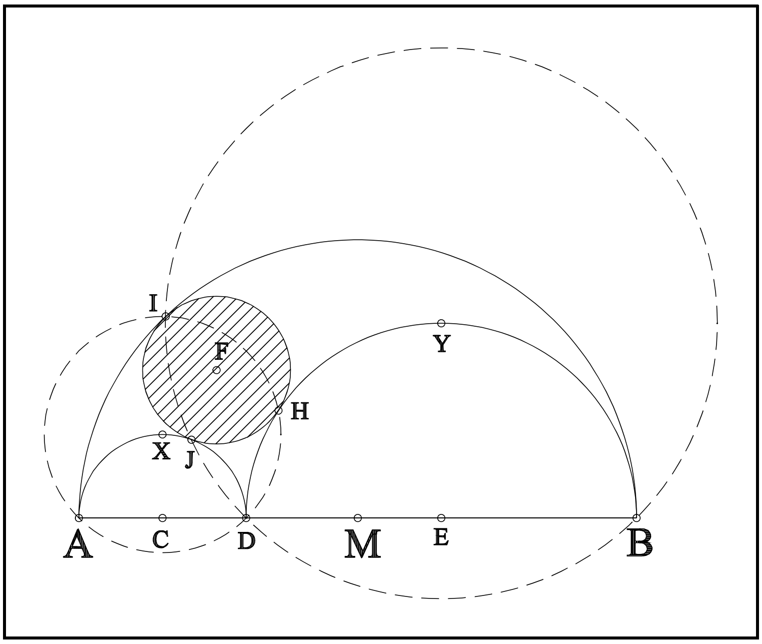
Bestimme die Radiusgröße **x** des Berührkreises und seinen Flächeninhalt in Abhängigkeit vom Radius **r** des kleinen inneren Halbkreises und vom Radius **R** des großen inneren Halbkreises.
Konstruiere danach die Figur mit:

r = 3 cm und **R** = 7 cm.

Tipp: Das nichtlineare Gleichungssystem löst man am besten, indem man jeweils alle quadratischen Glieder auf eine Seite bringt und dann gleichsetzt.

Arbelos

Kreisberechnung - Bögen und Kreise II

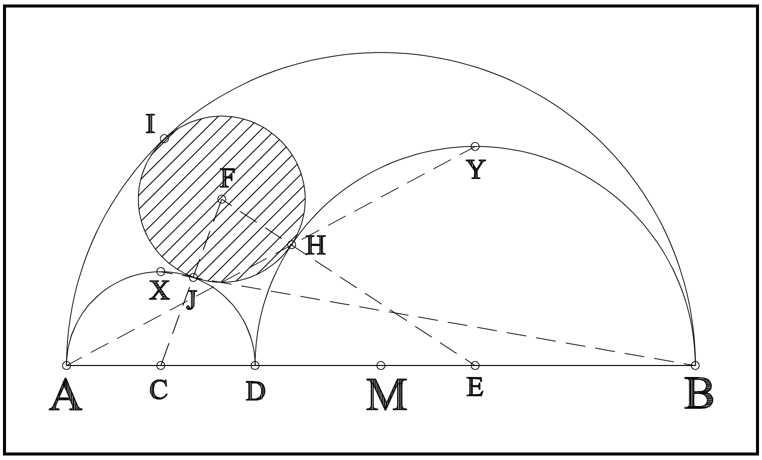


Den inneren Berührkreis des Arbelos (Berührkreisproblem des Apollonius) kann man auch relativ einfach konstruieren.

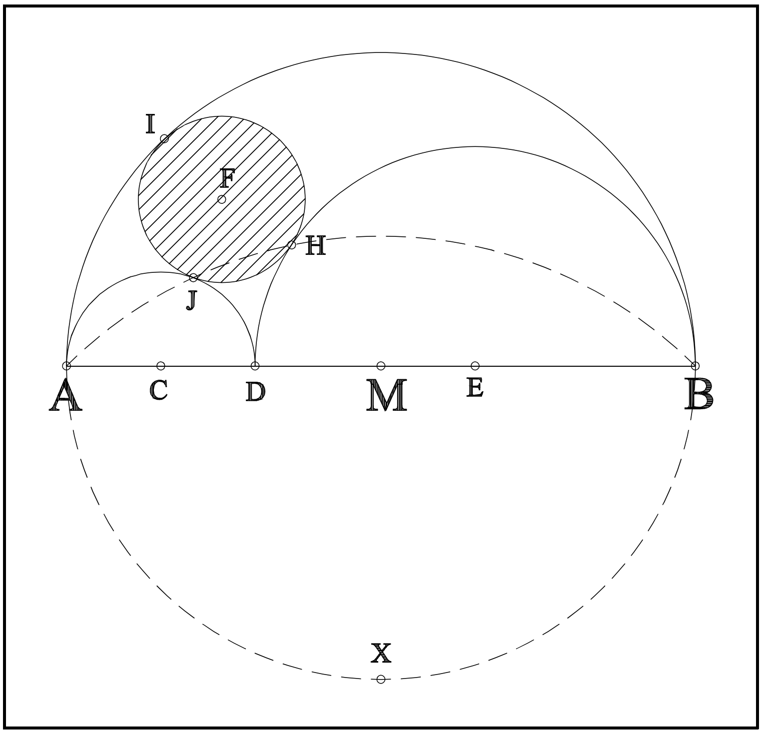
Analysiere die 3 Graphiken, insbesondere hinsichtlich der Hilfslinien, und konstruiere dann entsprechend den Berührkreis mit den Maßen:

r = 3 cm und **R** = 7 cm.

Vergleiche durch Messung mit den zuvor errechneten Größen von **x**, **a** und **h**.

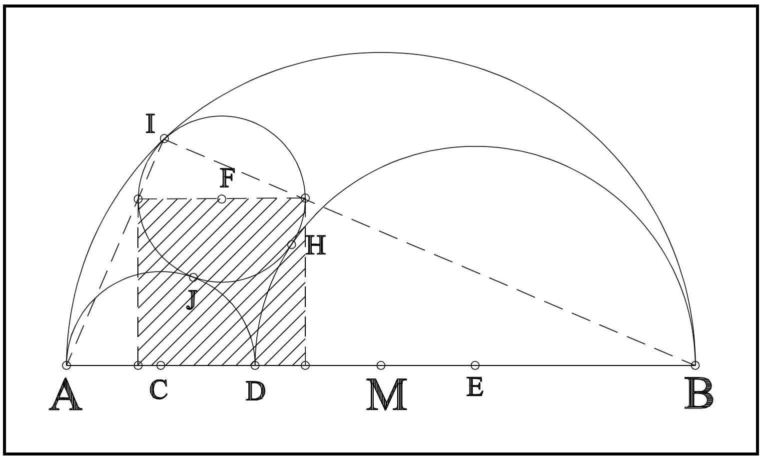


Wie erhält man jeweils die Berührpunkte **H**, **I**, **J** und den Mittelpunkt **F** des Berührkreises?



Quelle: Peter Y. Woo: Simple Constructions of the Incircle of an Arbelos;
Forum Geometricorum Volume 1 (2001) 133 - 136

....

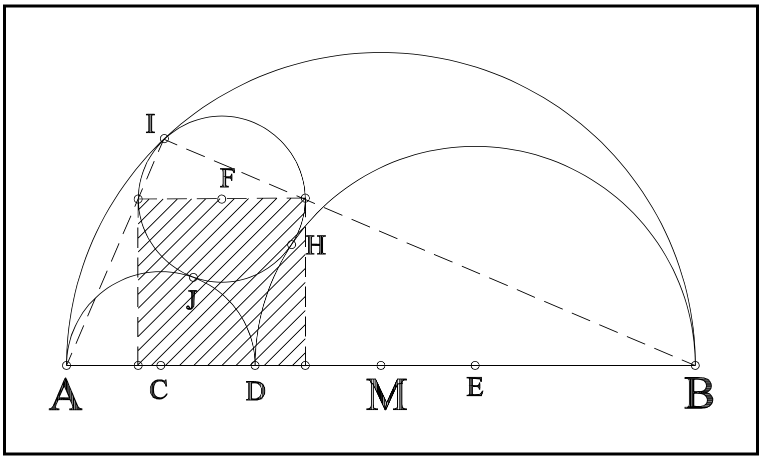


<u>Eine weitere interessante Folgerung:</u>

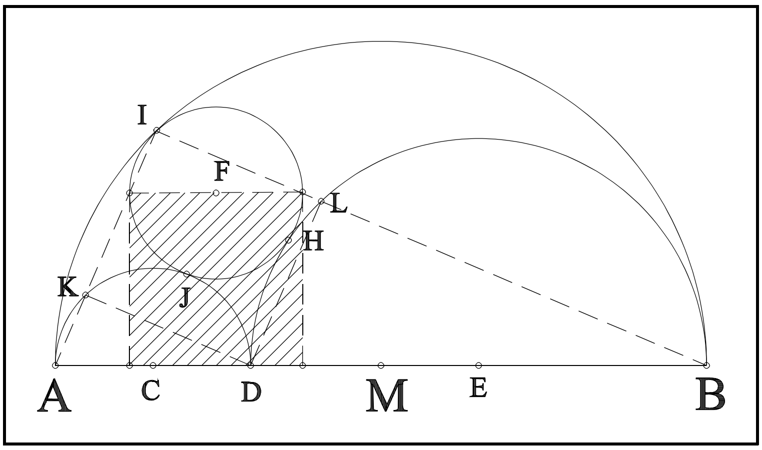
Bestätige, gemäß den vorigen Rechnungen allgemein, dass gilt:

$$\mathbf{h} = 2 \cdot \mathbf{x} \,,$$

d.h. das schraffierte Viereck ist ein Quadrat. - Dies soll schon Archimedes bekannt gewesen sein.



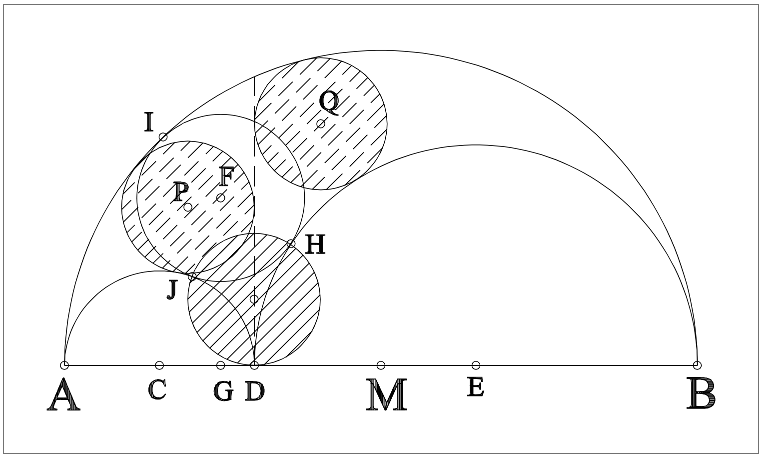
Kann man das auch eventuell mit geometrischen Sätzen beweisen?



Wenn man sich an den Satz des Thales erinnert, so überrascht in dieser Figur sicherlich nicht ein weiteres Rechteck, doch scheint auch Viereck □**DLIK** ein Quadrat zu sein.

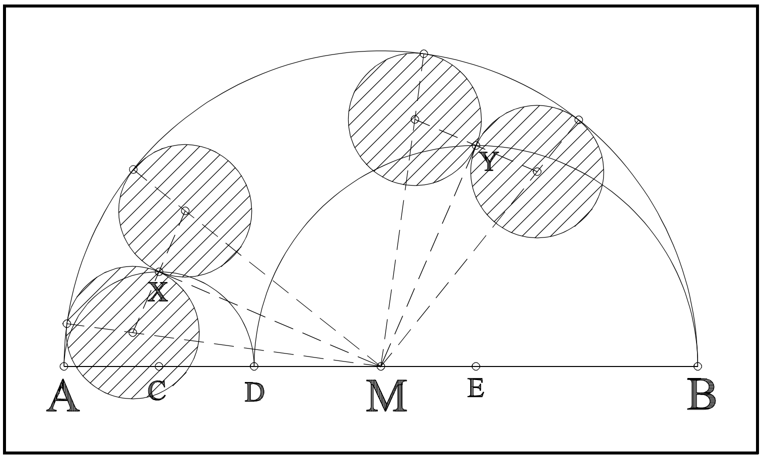
Versuche zunächst, diese Vermutung durch eine Messung in einer geeigneten Skizze zu bestätigen.

Falls die Vermutung richtig zu sein scheint begründe den Sachverhalt.



DRILLINGE
(Bankoff Tripel)

Zeige: Der Kreis durch die Punkte **D**, **H** und **J** (H und J sind die Berührpunkte des Apolloniuskreises an die inneren zwei Halbkreise) ist kongruent zu den Zwillingskreisen des Archimedes.



VIERLINGE

X und **Y** sind die Scheitelpunkte der inneren Arbeloshalbkreise.

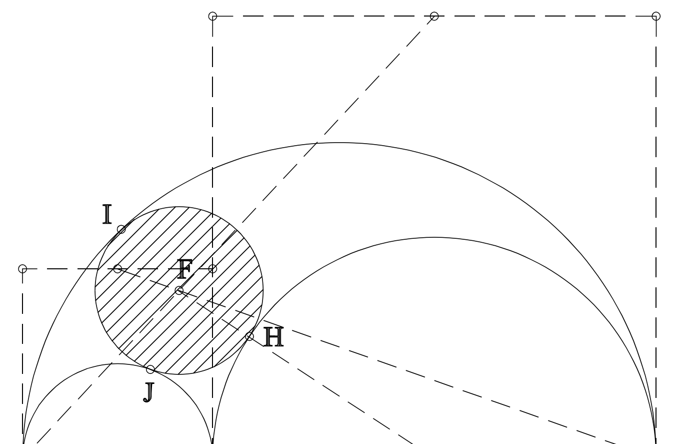
Zeige: Zeichnet man tangential an die Strecken **MX** und **MY** Berührkreise an den äußeren Arbeloshalbkreis, so sind diese 4 Kreise kongruent zu den Zwillingskreisen des Archimedes.

Quelle: Frank Power: Some more Archimedean Circles in the Arbelos;
Forum Geometricorum Volume 5 (2005) 133 - 134

HA:

Konstruiere den inneren Berührkreis des Arbelos entsprechend der nebenstehenden Graphik mit geeigneten Maßen für **r** und **R**.

Berechne den Radius **x** des Berührkreises, und fertige eine entsprechende neue Skizze an, für den Sonderfall: **r** = **R**.

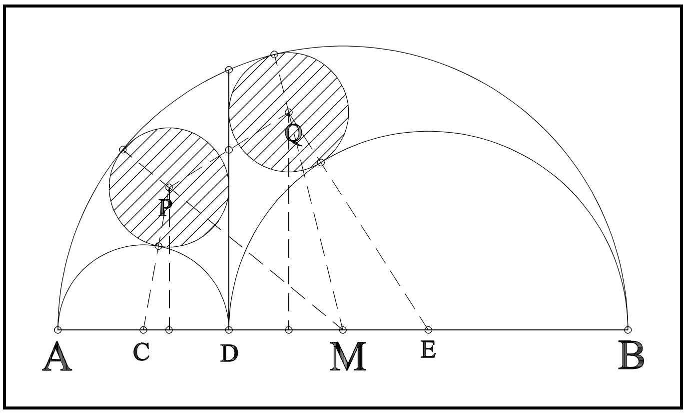


Lösungsskizzen:

Die **ZWILLINGE** des Archimedes mit eingezeichneten Hilfslinien.

Die jeweiligen Höhen h_1 und h_2 der Kreismittelpunkte lassen sich auf 2 Weisen als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmen.

Durch Gleichsetzen bestimmt man die Radien **z** der Zwillingskreise.



Es gilt:[1)]

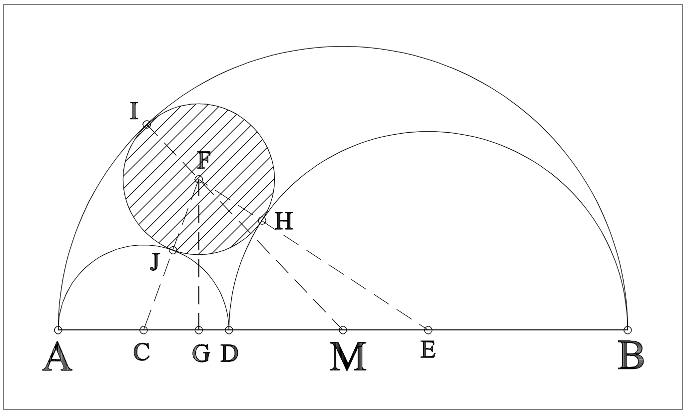
$$\mathbf{z} = \frac{r \cdot R}{r + R} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r}} \quad ; \quad h_1 = \overline{PQ} = 2 \cdot r \cdot \sqrt{\frac{R}{r+R}} \quad ; \quad h_2 = 2 \cdot R \cdot \sqrt{\frac{r}{r+R}}$$

Zu **APOLLONIUS**:

$$a := \overline{GM}$$

Ansatz:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} & h^2 & + \quad a^2 & = & (R + r - x)^2 \\ \wedge & h^2 & + \quad (a + r)^2 & = & (R + x)^2 \\ \wedge & h^2 & + \quad (R - a)^2 & = & (r + x)^2 \end{array} \right\}$$



Bei allen 3 Gleichungen den Term: $h^2 + a^2 - x^2$ auf der linken Seite isolieren. Das nachfolgende Gleichsetzen der rechten Seiten von 1. und 2. Gleichung und von 1. und 3. Gleichung führt zu einem System von zwei Gleichungen in den Variablen **a** und **x**.

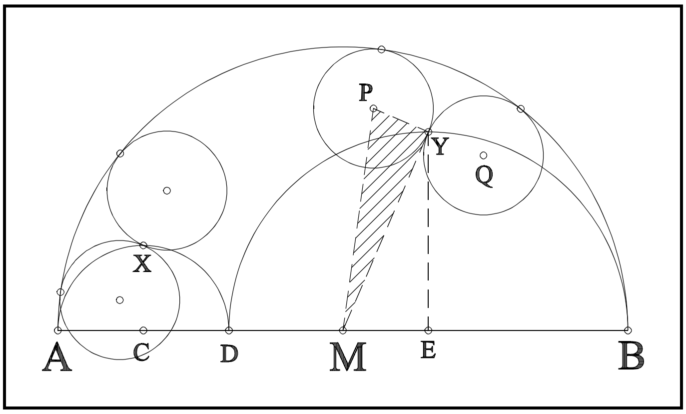
$$\mathbf{x} = \frac{r \cdot R \cdot (r + R)}{r^2 + r \cdot R + R^2}$$

Wenn **r** = 3 cm und **R** = 7 cm, dann ergibt sich: **a** ≈ 5,0633 cm, **h** ≈ 5,3165 cm und **x** ≈ 2,6582 cm.

---

1) <u>Beachte:</u> Der Durchmesser eines Zwillingskreises ist das harmonische Mittel der Radien der beiden Halbkreise.

Zu **VIERLINGE**:
(exemplarisch für einen Kreis)



Im ΔMEY gilt:

$$\overline{MY}^2 = r^2 + R^2$$

Im ΔMYP gilt:

$$\overline{MY}^2 + z^2 = (R + r - z)^2$$

Nach Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt sich: $\boxed{\mathbf{z} = \frac{r \cdot R}{r + R}}$.

<u>zur HA:</u>

$$\mathbf{x} = \frac{2}{3} \cdot \mathbf{r}$$