Berechnung von π

Das Iterationsverfahren des Nicolaus Cusanus

Das Iterationsverfahren zur näherungsweisen Berechnung der Kreiszahl π von Nicolaus **Cusanus**? - Wer war denn dieser Mann? - Eine kurze Internet-Recherche schafft ein wenig Klarheit:

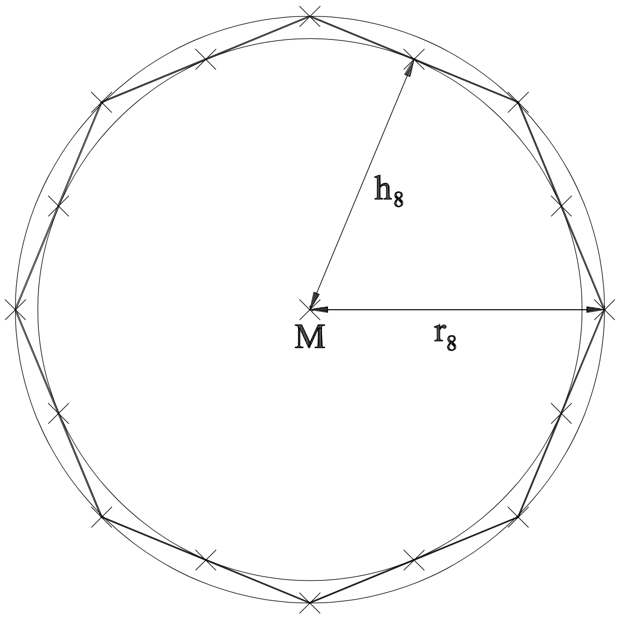
Nicolaus ***Cusanus*** *wurde 1401 in Kues als Sohn des Kaufmanns Johann Cryfftz (Krebs) geboren. Nach Studien in Heidelberg, Padua und Köln stieg er als Priester und Wissenschaftler in die höchsten Ränge des öffentlichen Lebens seiner Zeit auf: Konzilsmitglied in Basel, päpstlicher Legat in Deutschland, Kardinal der römischen Kirche, Bischof von Brixen, Generalvikar in Rom. Nicolaus* ***Cusanus*** *war der bedeutendste Philosoph des 15. Jahrhunderts. Er hat als erster die Unendlichkeit der Welt gelehrt. Damit leitete er über zur mathematischen Wissenschaft der Neuzeit. Er schuf ein Weltbild, das von der neuzeitlichen Wissenschaft von Kopernikus bis Einstein als in den Grundzügen richtig bestätigt wurde. Er starb 1464 in Italien.*

Offensichtlich ein hoch gebildeter Mann, der sich auch in vielfältiger Hinsicht mit mathematischen Fragen beschäftigt hat. - Was ist denn nun das Besondere seines Näherungsverfahrens?

Cusanus schachtelte nicht einen vorgegebenen Kreis durch ein- und umbeschriebene regelmäßige Vielecke ein, sondern er schachtelte ein vorgegebenes regelmäßiges Vieleck <u>fester</u> Umfangslänge 2 durch ein- und umbeschriebene Kreise ein. Damit muss gelten:

$$2 \cdot \pi \cdot h_n < 2 < 2 \cdot \pi \cdot r_n$$

$$\frac{1}{r_n} < \pi < \frac{1}{h_n}$$



d.h.: man erhält eine Intervallschachtelung für π, wenn man die Radien der ein- und umbeschriebenen Kreise iterativ bei immer größerer Eckenanzahl des regelmäßigen Vieleckes der Umfangslänge 2 bestimmt.

Cusanus begann mit einem regelmäßigen 4-Eck (also einem Quadrat) und überlegte sich eine Iterationsvorschrift für die Radien bei Verdoppelung der Eckenanzahl, d.h. als Eckenanzahlen kommen bei seinem Verfahren nur Zweierpotenzen vor.

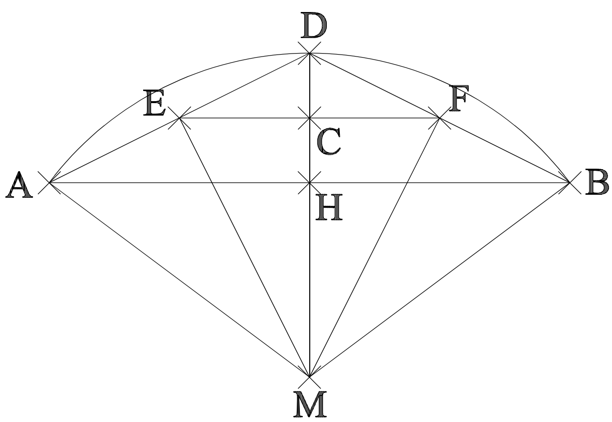
1) Bestätige, dass für die Radien des ein- und umbeschriebenen Kreises eines regelmäßigen 4-Eckes der Umfangslänge 2 gilt:

$$r_4 = \frac{\sqrt{2}}{4} \; ; \quad h_4 = \frac{1}{4}$$

Nun geht es um die Herleitung einer Iterationsvorschrift. Sei $\overline{MA} = r_n$ und $\overline{MH} = h_n$, dann gilt auch:

$$\overline{MD} = r_n \,,\ \overline{ME} = r_{2n} \,,\ \overline{MC} = h_{2n}$$

Warum eigentlich?



....

Berechnung von π

Das Iterationsverfahren des Nicolaus Cusanus

Es ist sicher aufgefallen, dass wegen: $\overline{EF} = \frac{\overline{AB}}{2}$ die Strecke EF als Sehne eines regelmäßigen 2n-Eckes aufgefasst werden kann, wenn AB die Sehne des regelmäßigen n-Eckes ist. Außerdem ist C der Mittelpunkt der Strecke HD, womit sich leicht ergibt:

$$\boxed{h_{2n} = \frac{r_n + h_n}{2}}$$

2) Bestätige mit dem Kathetensatz des Euklid, (im ΔMDE), dass sich als zweiter Iterationsterm ergibt:

$$\boxed{r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot h_{2n}}}$$

Verblüffende Einfachheit!!

n	h_n	r_n	h_{2n}	r_{2n}	$\frac{1}{r_{2n}}$	$\frac{1}{h_{2n}}$
4	0,250000000	0,353553391	0,301776695	0,326640741	3,061467459	3,313708499
8	0,301776695	0,326640741	0,314208718	0,320364431	3,121445152	3,182597878
16	0,314208718	0,320364431	0,317286575	0,318821789	3,136548491	3,151724907
32	0,317286575	0,318821789	0,318054182	0,318437754	3,140331157	3,144118385
64	0,318054182	0,318437754	0,318245968	0,318341846	3,141277251	3,142223630
128	0,318245968	0,318341846	0,318293907	0,318317876	3,141513801	3,141750369
256	0,318293907	0,318317876	0,318305891	0,318311884	3,141572940	3,141632081
512	0,318305891	0,318311884	0,318308888	0,318310386	3,141587725	3,141602510
1024	0,318308888	0,318310386	0,318309637	0,318310011	3,141591422	3,141595118
2048	0,318309637	0,318310011	0,318309824	0,318309917	3,141592346	3,141593270
4096	0,318309824	0,318309917	0,318309871	0,318309894	3,141592577	3,141592808
8192	0,318309871	0,318309894	0,318309882	0,318309888	3,141592634	3,141592692
16384	0,318309882	0,318309888	0,318309885	0,318309887	3,141592649	3,141592663
32768	0,318309885	0,318309887	0,318309886	0,318309886	3,141592652	3,141592656

Quelle: A. Engel: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt; Verlag: Klett