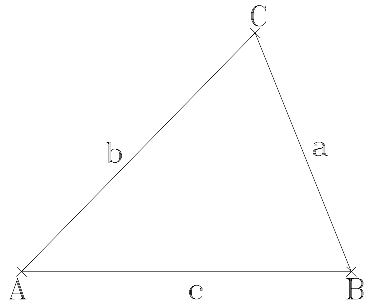
Der Flächeninhalt eines Dreiecks - ohne Messung -

(Manchmal muss man Umwege gehen)

Um den Flächeninhalt eines Dreieckes zu bestimmen, das keinen rechten Winkel besitzt, muss man bekanntlich die Längen einer Seite mit der dazugehörigen Höhe kennen.

Wir setzen voraus, dass uns alle 3 Seitenlängen bekannt sind (womit das Dreieck nach dem Kongruenzsatz SSS eindeutig bestimmt ist).

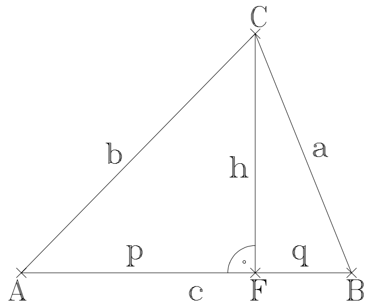
Wie berechnen wir nun die Länge einer Höhe ***h ?!***



Wir können mit den 3 Sätzen der Satzgruppe des Pythagoras (inkommensurable) Streckenlängen bestimmen; doch dazu müßte das Dreieck rechtwinklig sein! - Also fällen wir zunächst vom Punkt C das Lot auf die Strecke AB!

Wenn wir nun die Längen der Lotabschnitte **p** und **q** berechnen könnten, wäre die Bestimmung des Höhenmaßes mit dem Satz des Pythagoras kein Problem mehr.

<u>Also:</u> **p** und **q** berechnen !



$$\left.\begin{array}{l}\text{Im Dreieck } \Delta AFC \text{ gilt: } h^2 = b^2 - p^2 \\ \text{Im Dreieck } \Delta FBC \text{ gilt: } h^2 = a^2 - q^2\end{array}\right\} \Rightarrow b^2 - a^2 = p^2 - q^2 \quad (*)$$

Entweder **p** oder **q** müssen wir aus der Gleichung (*) durch unsere Kenntnis der Seitenlänge c eliminieren!

1) Setze in (*) die Beziehung: **q = c - p** ein und zeige, dass gilt: $\mathbf{p} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot c}$.

2) Multipliziere (*) mit (-1), setze: **p = c - q** ein und zeige: $\mathbf{q} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot c}$.

3) Es seien gegeben: c = 8 cm, b = 6 cm und a = 5 cm. - Berechne die Größen **p**, **q** und **h** und bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks!

4) Frage eines Schülers: Klappt das auch, wenn die Höhe außerhalb des Dreiecks verläuft, d.h. wenn das Dreieck stumpfwinklig ist? - Nun, man könnte das Dreieck ja auch so drehen, dass die Grundseite dem stumpfen Winkel gegenüberliegt! - Dennoch: Versuche den Fall einer außerhalb des Dreiecks verlaufenden Höhe zu lösen!

5) Es seien gegeben: c = 13 cm, b = 12 cm und a = 5 cm. - Berechne die Größen **p**, **q** und **h** und bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks! - Geht es auch einfacher?

6) Die in 5) auftauchenden Maßzahlen bilden ein pythagoräisches Zahlentripel ($5^2 + 12^2 = 13^2$)! - Finde mindestens 3 weitere pythagoräische Zahlentripel!

7) Formuliere den Satz des Pythagoras in einer „Wenn .... , dann .... „ - Form und formuliere den Kehrsatz. Beweise den Kehrsatz unter Verwendung des Kongruenzsatzes SSS.
Damit ist klar, dass das Dreieck in 5) rechtwinklig war, womit die Flächeninhaltsbestimmung über die Katheten viel einfacher gewesen wäre!

Der Flächeninhalt eines Dreiecks - ohne Messung -

(Manchmal muss man Umwege gehen)

Was ergibt sich eigentlich für eine allgemeine Beziehung, wenn wir den Flächeninhalt des Dreiecks nun allgemein mit unseren gefundenen Ausdrücken für **p** und **q** bestimmen? - Also los, mit ein wenig Algebra wird es gehen!

Zuerst die Höhe **h** allgemein bestimmen. Es gilt nach dem Satz des Pythagoras (und nach mehrfacher Anwendung von binomischen Formeln):

$$
\begin{aligned}
h^2 &= b^2 - p^2 = (b+p)\cdot(b-p) \\
&= \left(b + \frac{c^2+b^2-a^2}{2\cdot c} \right) \cdot \left(b - \frac{c^2+b^2-a^2}{2\cdot c} \right) \\
&= \frac{\left(2\cdot b\cdot c + c^2+b^2-a^2\right)\cdot\left(2\cdot b\cdot c - c^2-b^2+a^2\right)}{4\cdot c^2} \\
&= \frac{\left((c+b)^2-a^2\right)\cdot\left(a^2-(c-b)^2\right)}{4\cdot c^2} \\
&= \frac{(c+b+a)\cdot(c+b-a)\cdot(a+c-b)\cdot(a-c+b)}{4\cdot c^2}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreieckes allgemein:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}} &= \frac{c}{2}\cdot\sqrt{\frac{(c+b+a)\cdot(c+b-a)\cdot(a+c-b)\cdot(a-c+b)}{4\cdot c^2}} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{(c+b+a)\cdot(c+b-a)\cdot(a+c-b)\cdot(a-c+b)}
\end{aligned}
$$

Die Summe: a + b + c stellt die Umfangslänge des Dreieckes dar. Die Systematik des oberen Ausdruckes legt deshalb die Einführung einer neuen Variablen nahe, die auch den Faktor $\frac{1}{4}$ vor der Wurzel berücksichtigt:

$$s := \frac{1}{2}\cdot(a+b+c) \qquad \text{(s ist die halbe Umfangslänge)}$$

$$\boxed{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}} = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}$$

Es geht also doch ohne Höhe ! - Die obige Dreiecksformel wird Heron von Alexandria zugeschrieben, doch schon Archimedes soll sie gekannt haben.

---

8) Bestätige noch einmal dein Ergebnis von Aufgabe 3) mit Hilfe der Heronschen Dreiecksformel. Informiere dich durch Literaturrecherche (Lexikon, Internet, etc.) über die berühmten griechischen Mathematiker: Archimedes (von Syrakus) und Heron (von Alexandria).

Der Flächeninhalt eines Dreiecks - ohne Messung -
(Manchmal muss man Umwege gehen)

9) Aus Klassenstufe 7 ist dir höchstwahrscheinlich bekannt, dass für den Flächeninhalt eines Dreieckes auch gilt:

$$\boxed{\mathbf{A}_\Delta = s \cdot r_i}$$

(r_i: Radius des Innenkreises)

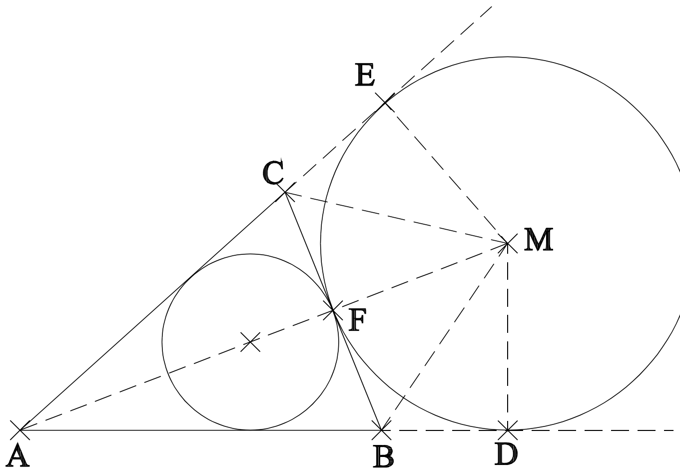
Bestätige:

$$\boxed{\mathbf{r_i} = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}}}$$

rechnerisch und überprüfe dein Ergebnis durch Konstruktion des Mittelpunktes M_i des Innenkreises deines Dreiecks und messen der Lotlänge beim Fällen des Lotes von M_i auf eine Dreiecksseite.

10) Überraschenderweise läßt sich nun auch einfach der Radius eines Ankreises[1] des Dreiecks berechnen (und natürlich konstruieren). (in der Skizze dargestellt nur für die Dreiecksseite BC = : a)

$$\boxed{\mathbf{r_a} = \sqrt{\frac{s\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{(s-a)}}}$$



Begründe die einzelnen Beweisschritte:[2]

$\Delta ABC = \Delta AMC + \Delta ABM - \Delta BMC$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot r_a + \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot r_a - \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot r_a \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC = \left(\frac{1}{2}\cdot\overline{AC} + \frac{1}{2}\cdot\overline{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overline{BC} - \overline{BC}\right)\cdot r_a$$

$$\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} = (s-a)\cdot \mathbf{r_a}$$

11) Berechne die Radien der 3 Ankreise deines Dreieckes und bestätige die Rechnungen durch entsprechende Konstruktionen.

"Der Knüller":

Bestätige algebraisch und durch exemplarische, konkrete Rechnung an deinem Dreieck, dass die folgende Beziehung richtig ist.

$$\boxed{r_i \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \mathbf{A}_\Delta^2}$$

"Bildet man das Produkt aus den Radien der 3 Ankreise und dem Radius des Innenkreises eines Dreiecks, so erhält man das Quadrat des Flächeninhaltes des Dreiecks!"

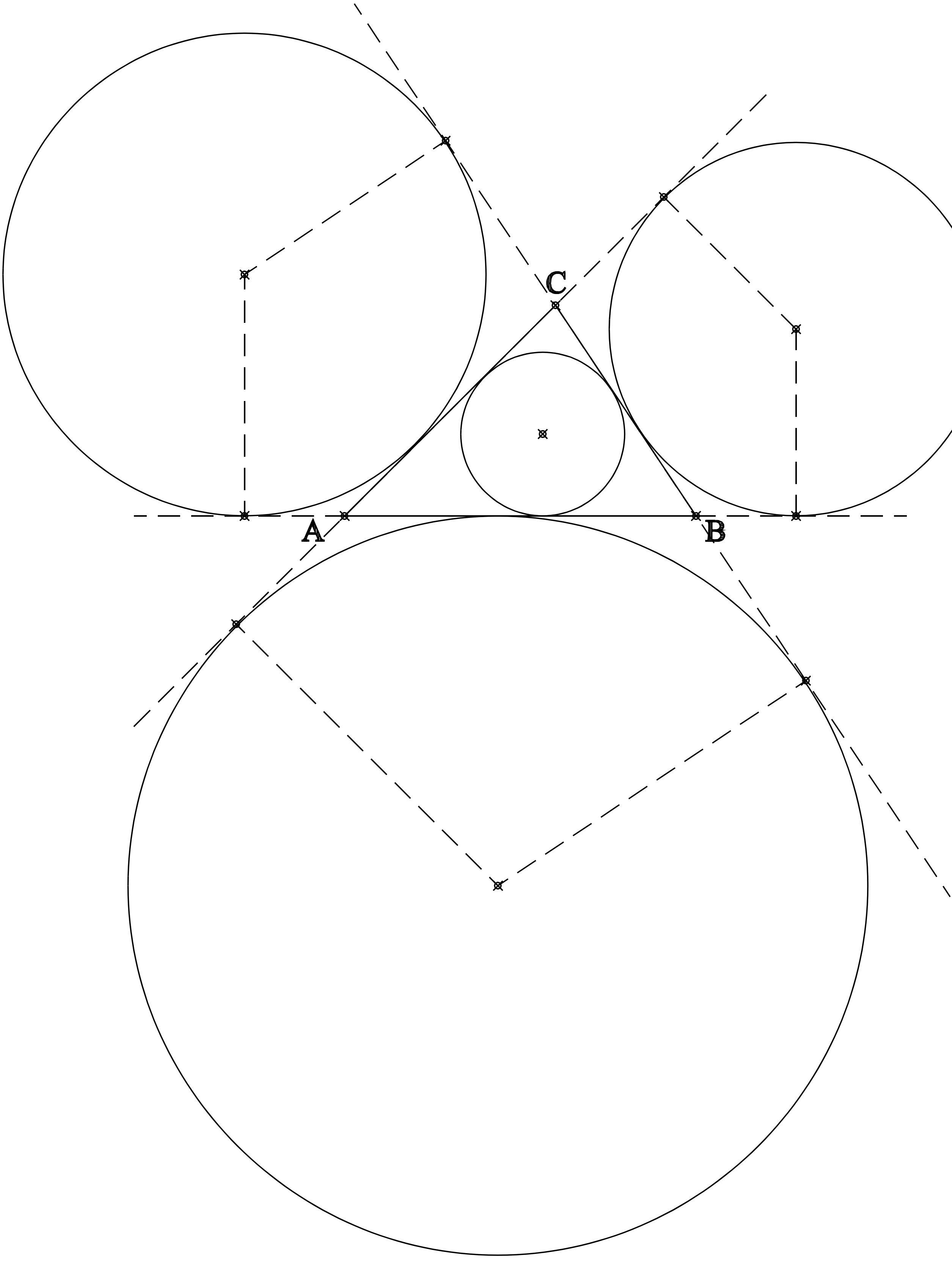
---

[1] Wie konstruierte man noch einmal eine Ankreisfigur? - Über die Winkelhalbierenden der Außenwinkel?

[2] Im folgenden ist zur Schreibvereinfachung z.B. mit der Bezeichnung: ΔABC stets der <u>Flächeninhalt</u> des Dreieckes gemeint.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks - ohne Messung -

(Manchmal muss man Umwege gehen)



12) Gegeben ist ein Dreieck mit Innenkreis und seinen 4 Ankreisen. Miss die 4 Radien der Kreise, die 3 Seitenlängen des Dreiecks, sowie die Höhe h_c möglichst genau. - Bestimme nun den Flächeninhalt des Dreiecks auf mindestens 4 wesentlich verschiedene Weisen unter Verwendung deiner Messergebnisse.

....

13) Beweise, unter Verwendung der Ergebnisse der Aufgaben 9) und 10), dass folgender (erstaunlicher) Zusammenhang richtig ist:

$$\boxed{\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}}$$

„Bei einem beliebigen Dreieck ist der Kehrwert des Radius des Innenkreises gleich der Summe der Kehrwerte der Radien der drei Ankreise.“ - Überprüfe diesen Sachverhalt auch am Beispiel von Aufgabe 12).

---

14) Der chinesische Mathematiker Qin Jiushao[3] vollendete sein Werk „Shushu jiuzhang“ (mathematische Abhandlung in neun Büchern) im Jahr 1247. Dort findet man die folgende Formel zur Bestimmung des Flächeninhaltes eines Dreiecks:

$$\boxed{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left[c^2 \cdot a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]}}$$

Bestätige zuerst an einem konkreten Beispiel, dass die obige Beziehung vermutlich richtig ist. - Verwende die Beziehung 2) auf der ersten Seite und die Gleichung: $h^2 = a^2 - q^2$ um zu beweisen, dass die Formel von Qin Jiushao der Heronschen Dreiecksformel entspricht.

---

15) Auf der Internetseite: http://www.agutie.com von Antonio Gutierrez findet man folgende Formel zur Bestimmung des Flächeninhaltes eines Dreieckes:

$$\boxed{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Delta}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{m \cdot (m - s_a) \cdot (m - s_b) \cdot (m - s_c)}} \qquad m := \frac{s_a + s_b + s_c}{2} .$$

Erläutere die Richtigkeit dieser Formel. Erinnere dich an eine Aufgabe aus der Koordinatengeometrie der Klasse 8.

---

[3] **Qin Jiushao** (auch **Ch‘in Chiu-Shao**), ✳ 1202 in Puzhou (Provinz Szechwan), ✝ 1261 in Meizhou (Provinz Guangtong)