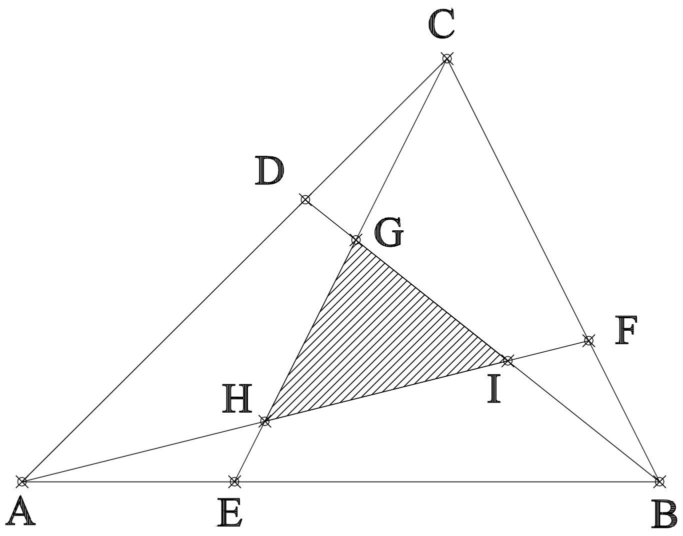
Flächeninhalt und Teilungsverhältnis

oder ...: Eine Dreiecksfläche kommt selten allein!

Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck und finde Punkte **D**, **E**, **F** auf den Dreiecksseiten **CA**, **AB** und **BC** so, dass gilt:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{1}{2} \;\wedge\; \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{2} \;\wedge\; \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{1}{2}$$

Zeichne die Strecken **AF**, **BD** und **CE** ein. Diese Strecken schneiden sich paarweise in den Punkten **G**, **H** und **I** (siehe Skizze).

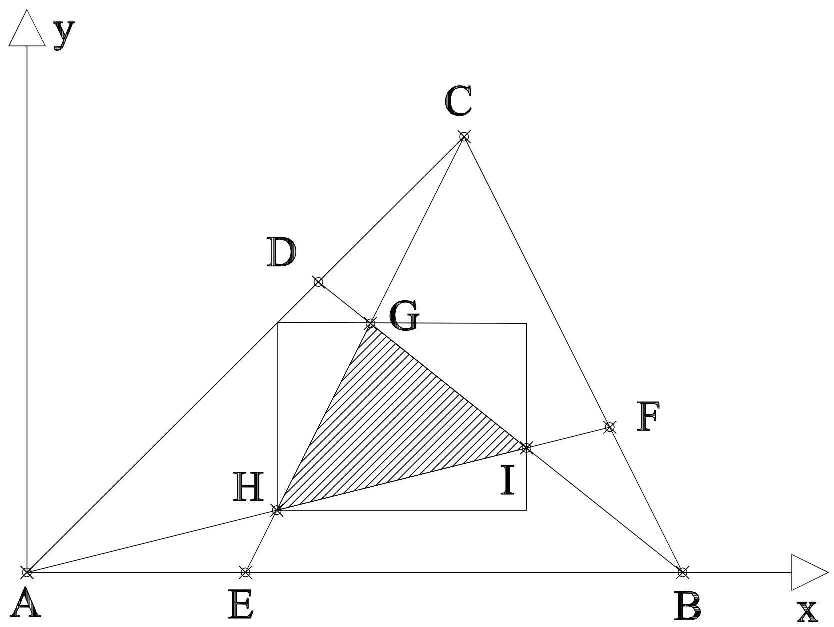


1) Untersuche die Figur auf Besonderheiten. Bestimme dabei insbesondere die Flächeninhalte des Ausgangsdreiecks und von Teilfiguren. - Vergleiche mit Ergebnissen deiner Nachbarn. - Habt ihr gemeinsam schon etwas entdeckt ?

ΔABC: $\mathbf{A}_\Delta \approx$ ΔGHI: $\mathbf{A}_\Delta \approx$

....

2) <u>Beweise:</u> Die Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** stehen im Verhältnis **7 : 1**. - Verfahre im Sinne von René Descartes so, dass du das Problem analytisch-algebraisch löst.



Sinnvollerweise legt man den Ursprung nach **A** und die Seite **AB** auf die x-Achse. Den Flächeninhalt des Dreiecks **ΔHIG** bestimmt man durch das umbeschriebene Rechteck, vermindert um die 3 rechtwinkligen Dreiecke.

Flächeninhalt und Teilungsverhältnis

oder ...: Eine Dreiecksfläche kommt selten allein!

<u>Lösungsskizze:</u>

Es gilt für ΔABC: $\mathbf{A_\Delta} = \frac{1}{2}\cdot x_B \cdot y_C$

Die Punktkoordinaten der Teilungspunkte sind:

$$\mathbf{D}\left(\tfrac{2}{3}\cdot x_C \,\middle|\, \tfrac{2}{3}\cdot y_C\right) \;;\; \mathbf{E}\left(\tfrac{1}{3}\cdot x_B \,\middle|\, 0\right) \;;\; \mathbf{F}\left(\tfrac{2}{3}\cdot x_B + \tfrac{1}{3}\cdot x_C \,\middle|\, \tfrac{1}{3}\cdot y_C\right)$$

Die Geradengleichungen lauten:

$$g(A;F): \quad \mathbf{y} = \frac{y_C}{2\cdot x_B + x_C}\cdot \mathbf{x}$$

$$g(E;C): \quad \mathbf{y} = \frac{3\cdot y_C}{3\cdot x_C - x_B}\cdot \mathbf{x} - \frac{x_B\cdot y_C}{3\cdot x_C - x_B}$$

$$g(B;D): \quad \mathbf{y} = \frac{-2\cdot y_C}{3\cdot x_B - 2\cdot x_C}\cdot \mathbf{x} + \frac{2\cdot x_B\cdot y_C}{3\cdot x_B - 2\cdot x_C}$$

Über die Geradengleichungen errechnen sich deren Schnittpunkte **H**, **I**, **G** zu:

$$\mathbf{H}\left(\tfrac{1}{7}\cdot(2\cdot x_B + x_C) \,\middle|\, \tfrac{1}{7}\cdot y_C\right) \;;\; \mathbf{I}\left(\tfrac{2}{7}\cdot(2\cdot x_B + x_C) \,\middle|\, \tfrac{2}{7}\cdot y_C\right) \;;\; \mathbf{G}\left(\tfrac{1}{7}\cdot(x_B + 4\cdot x_C) \,\middle|\, \tfrac{4}{7}\cdot y_C\right)$$

Mit der Strategie: „Umbeschriebenes Rechteck“ - „3 rechtwinklige Dreiecke“
erhält man relativ leicht für das kleine, innere Dreieck **ΔHIG**:

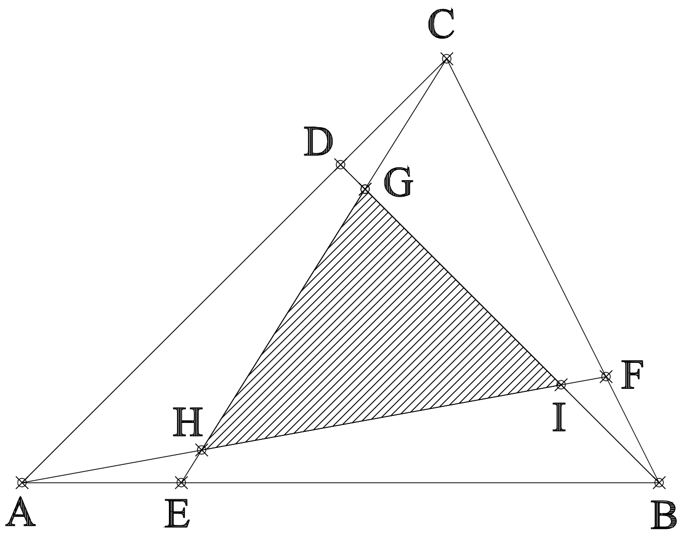
$$\boxed{\mathbf{A_\Delta} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot x_B \cdot y_C}$$

Flächeninhalt und Teilungsverhältnis

oder ...: Eine Dreiecksfläche kommt selten allein!

<u>Übung (und für Interessierte):</u>

Wählt man auf den Dreiecksseiten ein anderes Teilungsverhältnis für die Teilungspunkte **E**, **F** und **D**, so ändert sich natürlich das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** zueinander.



Im nebenstehend skizzierten Fall gilt:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{1}{3}$$

3) Untersuche zunächst durch exemplarische Konstruktion, welchen Anteil die Fläche des Dreiecks **ΔGHI** an der Fläche des Ausgangsdreiecks **ΔABC** nun einnimmt.

<u>Bestätige:</u> Die Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** stehen im Verhältnis **13 : 4**.

4) a) Ist für die Untersuchung von Bedeutung, dass das Dreieck **ΔABC** spitzwinklig ist?

b) Was erwartet man für den Fall: $\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{1}{1} \quad \wedge \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{1} \quad \wedge \quad \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{1}{1}$?

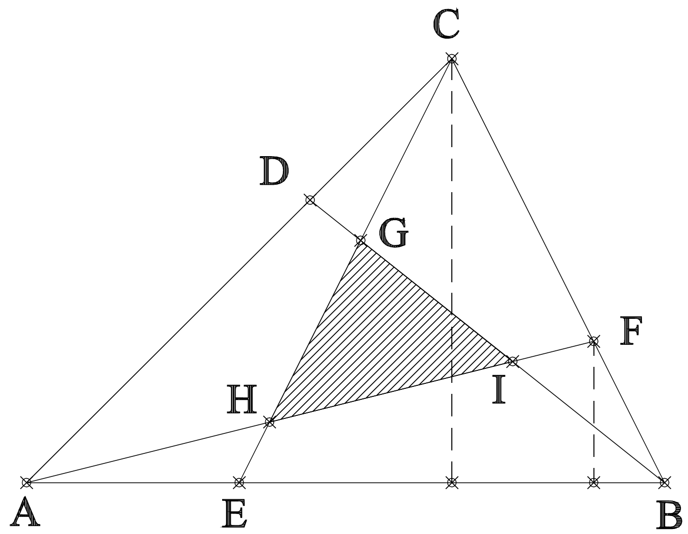
<u>Für eine Gruppe von Spezialisten:</u>

5) Untersucht arbeitsteilig durch unterschiedliche Wahl von Teilungsverhältnissen für die Teilungspunkte **E**, **F** und **D** auf den Dreiecksseiten, wie sich das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** zueinander verändert. - Kann man eine Gesetzmäßigkeit entdecken?[1]

---

[1] <u>Allgemein gilt:</u> Wenn $\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{1}{n} \wedge \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{n} \wedge \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{1}{n}$, dann stehen die Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** im Verhältnis $\left[\, n^2 + (n+1) \,\right] : (n-1)^2$.

<u>Eine rein geometrische Lösung zu 2):</u>[2]



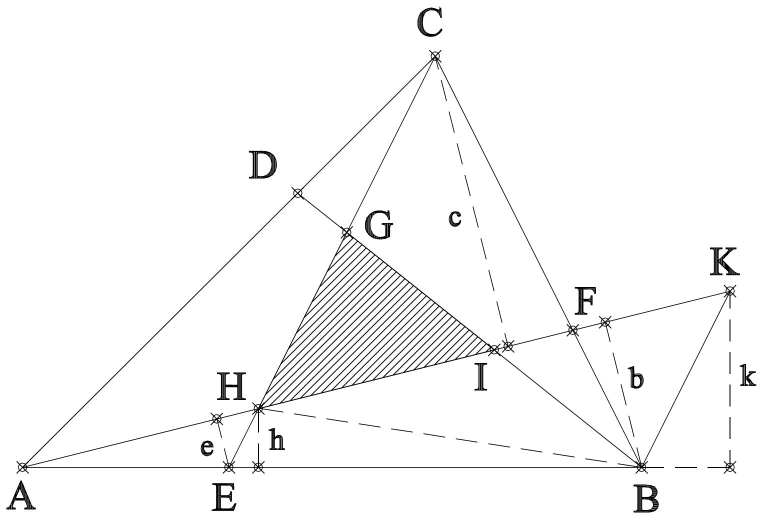
Begründe die folgenden Aussagen:

– Das Dreieck ΔABF besitzt ein Drittel des Flächeninhaltes des Dreiecks ΔABC.

– Die Dreiecke: ΔBCD und ΔAEC besitzen ein Drittel des Flächeninhaltes des Dreiecks ΔABC.

Wir definieren den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAEH als eine Flächeneinheit.

Verlängert man die Strecke AF über F hinaus und zieht dann eine Parallele zu EC durch B, so schneidet diese Parallele die Gerade g(A;F) in K.



– Das Dreieck ΔABK besteht aus 9 Flächeneinheiten.

– Das Dreieck ΔHBK besteht aus 6 Flächeneinheiten.

– Das Dreieck ΔFBK besitzt ein Viertel des Flächeninhaltes des Dreiecks ΔFCH und damit die Hälfte des Flächeninhaltes des Dreiecks ΔFHB.

– ΔFBK besteht aus 2 Flächeneinheiten, ΔHBF aus 4 Flächeneinheiten und ΔFCH aus 8 Flächeneinheiten.

– ΔEBC besteht aus 14 Flächeneinheiten und damit ΔABC aus 21 Flächeneinheiten, d.h. der Flächeninhalt des Dreiecks ΔAEH ist $\frac{1}{21}$ des Flächeninhaltes des Ausgangsdreiecks ΔABC.

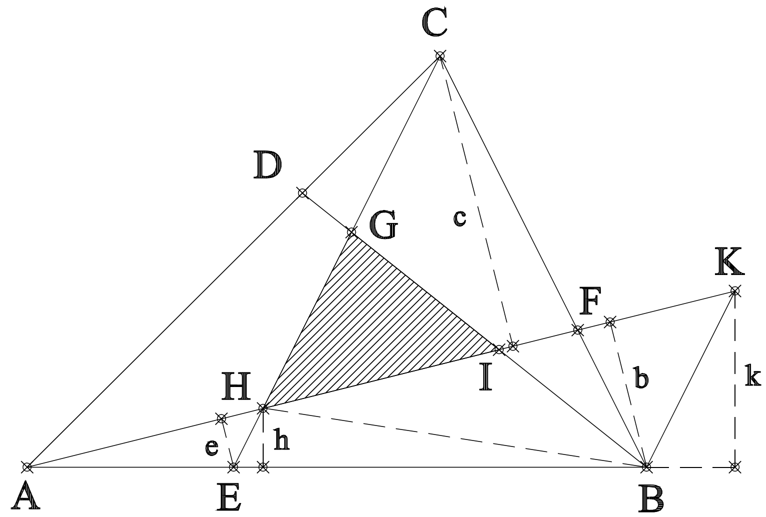
– Die Flächeninhalte der Dreiecke ΔBFI und ΔCDG sind jeweils $\frac{1}{21}$ des Flächeninhaltes des Ausgangsdreiecks ΔABC.

– Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔHIG ist $\frac{3}{21}$ des Flächeninhaltes des Ausgangsdreiecks ΔABC.

Nebenprodukt: Der Flächeninhalt der Vierecke □EBFH, □FCGI und □DAHG ist jeweils $\frac{5}{21}$ des Flächeninhaltes des Ausgangsdreiecks ΔABC.

[2] Mit hilfreicher Unterstützung von Prof. Dr. Wolfgang Schulz

<u>Eine verallgemeinerte Lösung zu 2):</u>



Wenn $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \dfrac{1}{n} \wedge \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \dfrac{1}{n} \wedge \dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \dfrac{1}{n}$,
dann stehen die Flächeninhalte der Dreiecke **ΔABC** und **ΔGHI** im Verhältnis

$$\left[\, n^2 + (n+1) \,\right] : (n-1)^2.$$

Es gilt:

a) $A_{\Delta ABF} = \frac{1}{n+1} \cdot A_{\Delta ABC}$

b) $A_{\Delta BCD} = \frac{1}{n+1} \cdot A_{\Delta ABC}$

$A_{\Delta CAE} = \frac{1}{n+1} \cdot A_{\Delta ABC}$

Wir definieren den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAEH als eine Flächeneinheit (1 FE).

Verlängert man die Strecke AF über F hinaus und zieht dann eine Parallele zu EC durch B, so schneidet diese Parallele die Gerade g(A;F) in K.

c) $A_{\Delta ABK} = (n+1)^2$ FE

d) $A_{\Delta HBK} = [(n+1)^2 - (n+1)]$ FE $= n\cdot(n+1)$ FE

e) $A_{\Delta FCH} = n^2 \cdot A_{\Delta FBK}$

$A_{\Delta HBF} = n \cdot A_{\Delta FBK}$

f) $A_{\Delta EBC} = \frac{n}{n+1} \cdot A_{\Delta ABC}$

$= n\ \text{FE} + (n^2+n) \cdot A_{\Delta FBK}$

$= n\ \text{FE} + (n^2+n) \cdot n\ \text{FE}$

$= (n^3+n^2+n)\ \text{FE}$

g) $A_{\Delta AEH} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n^2+n+1)} \cdot A_{\Delta ABC}$

h) $A_{\Delta BFI} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n^2+n+1)} \cdot A_{\Delta ABC}$

$A_{\Delta CDG} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n^2+n+1)} \cdot A_{\Delta ABC}$

i) $A_{\Delta HIG} = \left[\, 1 - \frac{3}{n+1} + \frac{3}{(n+1)\cdot(n^2+n+1)} \,\right] \cdot A_{\Delta ABC}$

$= \mathbf{\frac{(n-1)^2}{n^2+n+1}} \cdot A_{\Delta ABC}$