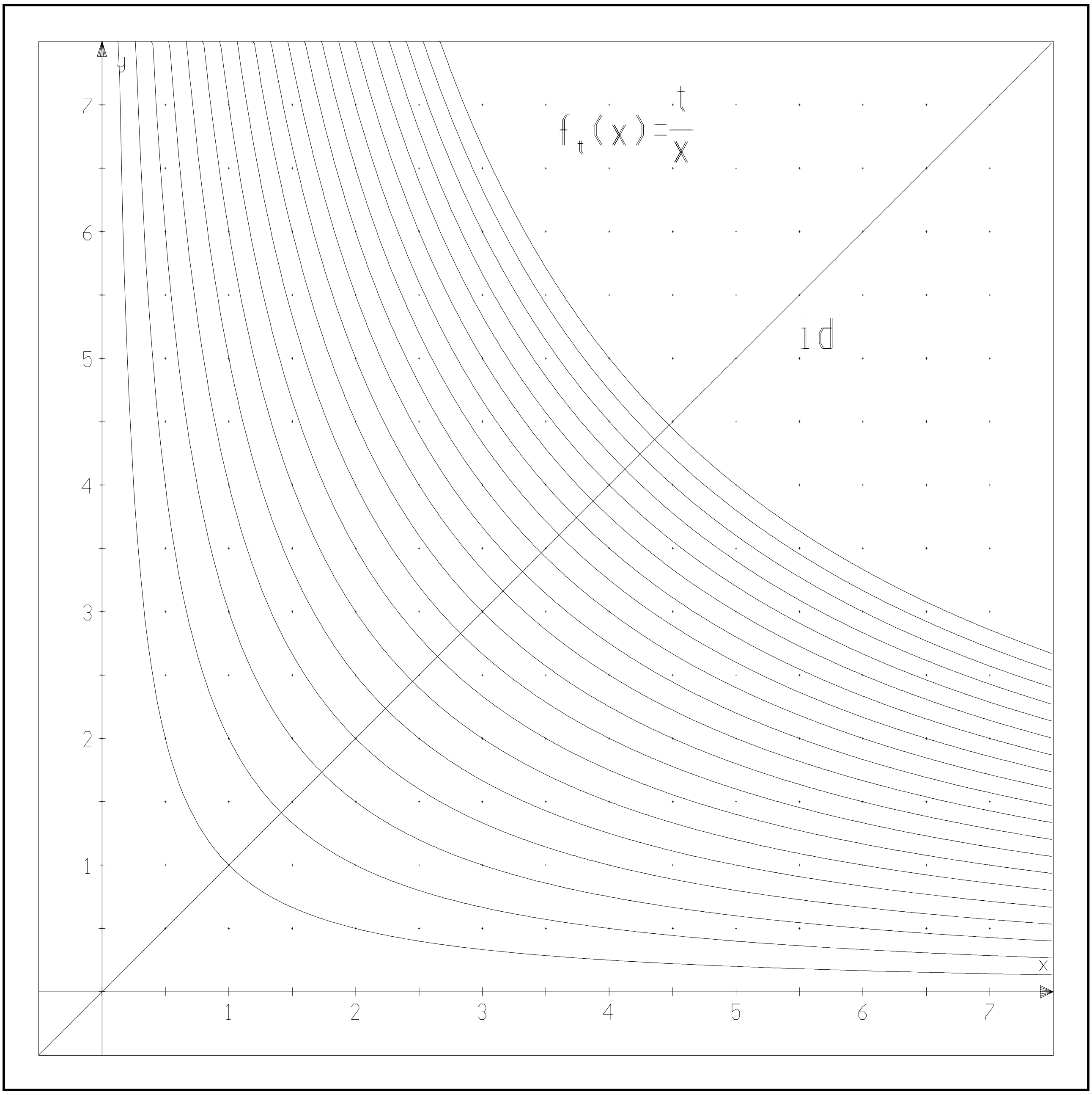
Zum Verfahren von Heron



Gegeben sind ist die Schar von Funktionen $\mathbf{f_t}$ mit $\mathbf{f_t(x)} = \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}$, $t \in \{1; ... ; 20\}$, sowie die Identität **id** mit der Funktionsgleichung **id(x) = x**. Der Schnittpunkt $\mathbf{S_t}$ ($\{S_t\} := f_t \cap id$) hat offensichtlich die Koordinaten: $\mathbf{S_t}\left(\sqrt{\mathbf{t}} \mid \sqrt{\mathbf{t}}\right)$!

Wählt man nun einen Näherungswert $\mathbf{x_1}$ für $\sqrt{\mathbf{t}}$ <u>vor</u> dem Schnittpunkt, also $\mathbf{x_1} < \sqrt{\mathbf{t}}$, so ist offensichtlich $\mathbf{f_t(x_1)} > \sqrt{\mathbf{t}}$ da $\mathbf{f_t}$ streng monoton fallend ist! - Umgekehrt: Wählt man einen Näherungswert $\mathbf{x_1}$ für $\sqrt{\mathbf{t}}$ <u>nach</u> dem Schnittpunkt, also $\mathbf{x_1} > \sqrt{\mathbf{t}}$, so ist offensichtlich $\mathbf{f_t(x_1)} < \sqrt{\mathbf{t}}$! - Es bietet sich also an, als neuen (besseren) Näherungswert das arithmetische Mittel von $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{f_t(x_1)}$ zu berechnen!

$\Longrightarrow$

$$\mathbf{x_{n+1}} := \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{x_n} + \mathbf{f_t(x_n)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{x_n} + \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x_n}}\right)$$

Bestimmung von dritten Wurzeln
Kann man das Verfahren von Heron übertragen?

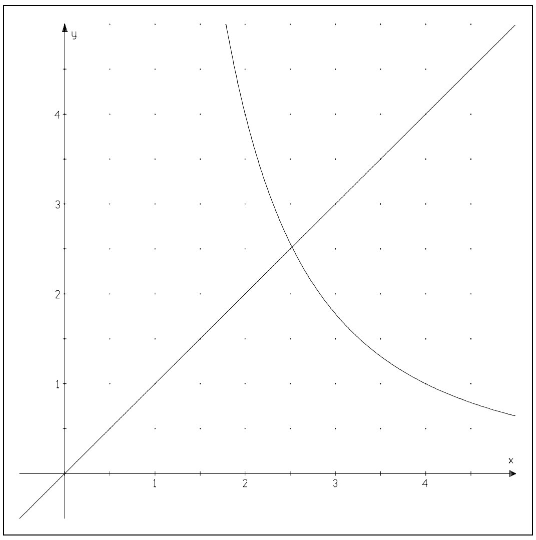
Wir wollen die Gleichung: $\mathbf{x^3 = 16}$ auf 2 verschiedene Weisen als Schnittpunktsproblematik untersuchen:

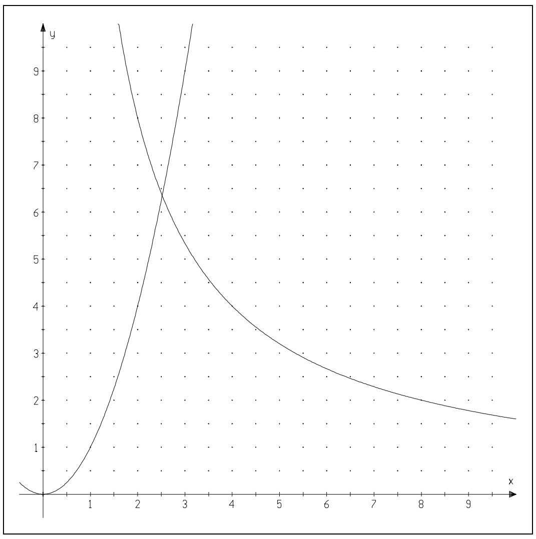
(1) $\mathbf{x = \frac{16}{x^2}}$ und (2) $\mathbf{x^2 = \frac{16}{x}}$

n	x_n	$\frac{16}{x_n^2}$	x_{n+1}	$(x_{n+1})^3$
1	2,00000000	4,00000000	3,00000000	27,00000000
2	3,00000000	1,77777778	2,38888889	13,63288752
3	2,38888889	2,80367766	2,59628328	17,50073254
4	2,59628328	2,37364535	2,48496431	15,34477301
5	2,48496431	2,59107313	2,53801872	16,34874664
6	2,53801872	2,48387845	2,51094859	15,83118636
7	2,51094859	2,53772374	2,52433616	16,08575931
8	2,52433616	2,51087796	2,51760706	15,95746295
9	2,51760706	2,52431813	2,52096260	16,02135360
10	2,52096260	2,51760260	2,51928260	15,98934454

n	x_n	x_n^2	$\frac{16}{x_n}$	x_{n+1}
1	2,00	4,00	8,00	6,00
2	6,00	36,00	2,67	19,33
3	19,33	373,78	0,83	187,30
4	187,30	35082,29	0,09	17541,19
5	17541,19	307693348,45	0,00	153846674,23

Warum klappt es im ersten Fall, im zweiten jedoch nicht? - Untersuche die entsprechende Graphik!





Bestimmung von dritten Wurzeln
Kann man das Verfahren von Heron übertragen?

Wie man leicht erkennt, spielt u.a. die Steigung und die Krümmung der Funktionsgraphen bei der Güte des Iterationsverfahrens eine große Rolle. - Für den Fall (1) der Schnittpunktsproblematik funktionierte die einfache Übertragung des Verfahrens für Quadratwurzeln mit der Bildung des arithmetischen Mittels der Funktionswerte der Identität und der Hyperbel zwar noch ganz gut, aber vielleicht kann man es verbessern?!

Heron von Alexandria hat vorgeschlagen:

Zur Bestimmung dritter Wurzeln bilde **nicht** die Iteration: $x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n^2} \right)$

sondern gib dem linearen Term mehr Gewicht und versuche: $\boxed{x_{n+1} := \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot x_n + \frac{a}{x_n^2} \right)}$

Das ist das Ergebnis für $\sqrt[3]{16}$:

n	x_n	$\frac{16}{x_n^2}$	x_{n+1}	$(x_{n+1})^3$
1	2,00000000	4,00000000	2,66666667	18,96296296
2	2,66666667	2,25000000	2,52777778	16,15164180
3	2,52777778	2,50404541	2,51986699	16,00047407
4	2,51986699	2,51979233	2,51984210	16,00000000
5	2,51984210	2,51984210	2,51984210	16,00000000

Kleine Ursache - Große Wirkung! - Wie ist er bloß darauf gekommen?

Aufgaben:

1. Versuche (Literatur - Internet etc) mehr über den ‚Mathematiker' **Heron** (Lebensdaten usw) und die Stadt **Alexandria** und ihre Bedeutung zu erfahren.

2. Versuche den Gedanken des Heron von Alexandria fortzusetzen und lege eine Tabelle für die folgende Iteration an: $x_{n+1} := \frac{1}{4} \cdot \left(3 \cdot x_n + \frac{35}{x_n^3} \right)$. Verwende wieder als Anfangswert $x_1 = 2$.

   Was für eine Zahl kann man möglicherweise mit dieser Iteration näherungsweise bestimmen? - Führe gegebenenfalls eine Kontrollrechnung durch! [1]

---

[1] Für besonders Interessierte: Es gilt allgemein (bei geeignetem Anfangswert) $x_{n+1} := \frac{1}{k} \cdot \left((k-1) \cdot x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \rightarrow \sqrt[k]{a}$!
Das können wir aber erst mit mathematischen Methoden der 11. Klasse beweisen.