Ähnlichkeit und Projektive Geometrie

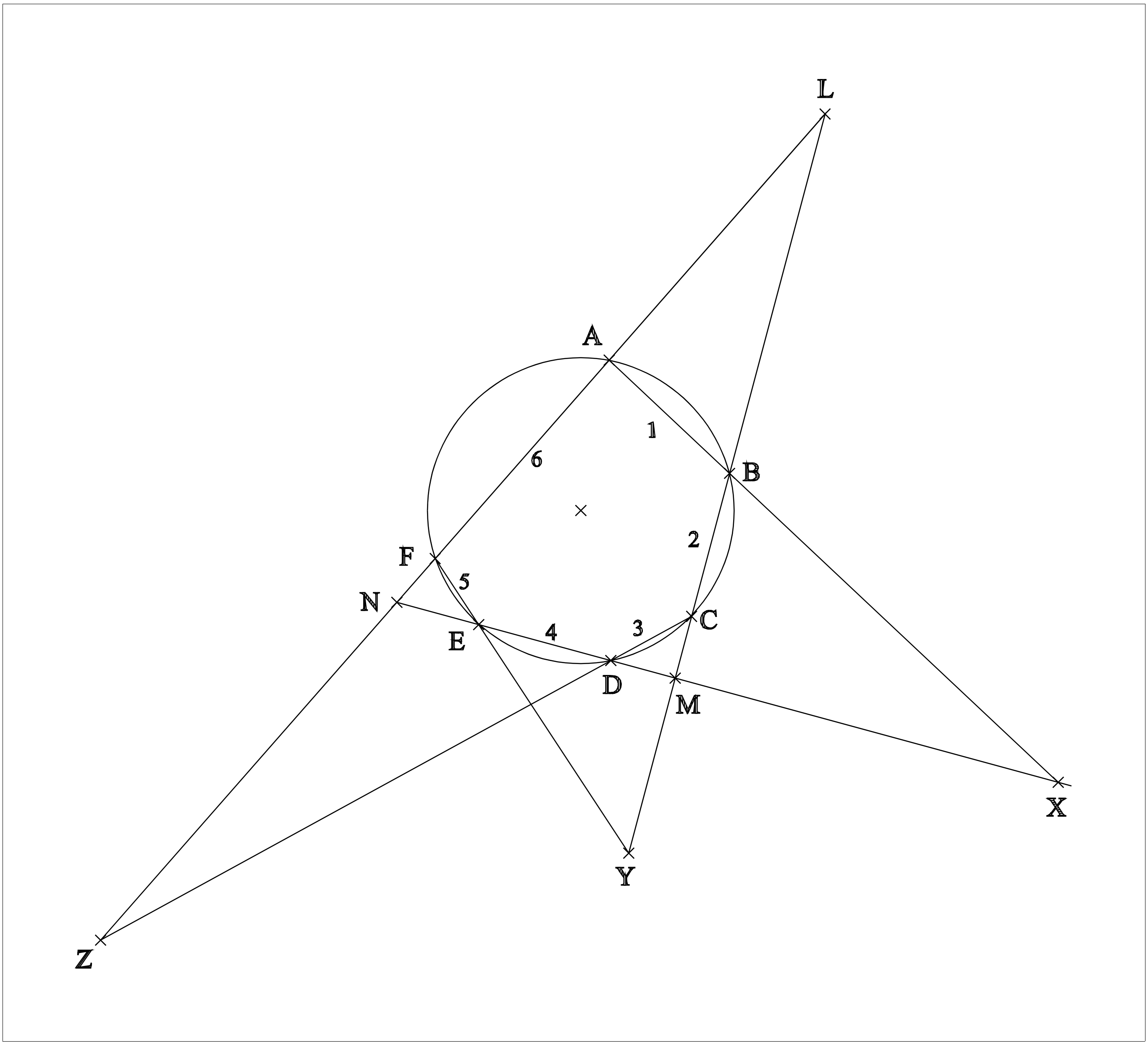
... wir nähern uns berühmten Sätzen (und können sie sogar beweisen)

Der folgende Satz gehört zu den wirklich sehr berühmten Sätzen der Geometrie und wurde von **Blaise Pascal** (1623 - 1662) im Alter von 16 Jahren gefunden. - Auf dem Bild rechts ist er natürlich schon etwas älter.
Vielleicht bedeutet "entdeckt" ja auch "wiederentdeckt" oder verallgemeinert, denn der Satz ist auch bekannt unter dem Namen: Satz von Pappus-Pascal. - Wer war eigentlich **Pappus**?

1. Versuche durch Literaturrecherche, Lexikon, Internet etc., mehr über Blaise Pascal und Pappus von Alexandria (~290 - ~350) zu erfahren.

Def.: In einem Sehnensechseck heißen **Gegenseiten** solche Seiten, die durch zwei andere Seiten getrennt sind, d.h. in der unteren Skizze sind es die Paare: 1 - 4, 2 - 5 und 3 - 6 .

<u>**Satz:**</u> Die 3 Schnittpunkte von je zwei Geraden, die Trägergeraden der Gegenseiten eines Sehnensechsecks sind, liegen auf einer Geraden. (Tipp für die Konstruktion: Blatt quer - Punkte A, B, C, D, E und F "geschickt" wählen, damit X, Y und Z noch auf das Blatt passen.)



Ähnlichkeit und Projektive Geometrie

... wir nähern uns berühmten Sätzen (und können sie sogar beweisen)

Nun zum Beweis. - Wir werden nahezu alles benötigen, was wir in der Ähnlichkeitslehre bisher gelernt haben.

a) Betrachtet man sich die Figur genauer, dann erinnert das sicher, bezogen auf die **Zentren L, M und N** an den **.... satz**!?

2. Bestätige, dass gilt:

$$\overline{LA}\cdot\overline{LF} = \overline{LB}\cdot\overline{LC}$$

$$\overline{MC}\cdot\overline{MB} = \overline{MD}\cdot\overline{ME}$$

$$\overline{NE}\cdot\overline{ND} = \overline{NF}\cdot\overline{NA}$$

....

b) Wir richten nun unseren Blick auf das Dreieck: **ΔLNM -** Die Seiten dieses Dreiecks werden von Geraden, zB.: g(A,B), g(C,D) und g(E,F), in Abschnitte unterteilt, wobei die Punkte X, Y und Z jeweils auf der Verlängerung einer Dreiecksseite liegen. - Moment einmal, - da gab es doch den **Satz des .....** ?!

3. Bestätige, dass gilt:

$$\overline{MB}\cdot\overline{NX}\cdot\overline{LA} = \overline{LB}\cdot\overline{MX}\cdot\overline{NA}$$

$$\overline{ND}\cdot\overline{LZ}\cdot\overline{MC} = \overline{MD}\cdot\overline{NZ}\cdot\overline{LC}$$

$$\overline{NE}\cdot\overline{LF}\cdot\overline{MY} = \overline{ME}\cdot\overline{NF}\cdot\overline{LY}$$

4. Bestätige, dass sich die folgende Gleichung ergibt, wenn man die linken und die rechten Seiten dieser 3 Gleichungen multipliziert und die 3 Beziehungen aus 2. verwendet:

$$\overline{LZ}\cdot\overline{MY}\cdot\overline{NX} = \overline{LY}\cdot\overline{MX}\cdot\overline{NZ}$$

Was sagt eigentlich der Kehrsatz des Satzes des Menelaos aus?

5. Formuliere den Kehrsatz des Satzes des Menelaos und begründe, dass mit diesem Satz aus der obigen Gleichung folgt, dass **die Punkte X, Y und Z auf einer Geraden** liegen.

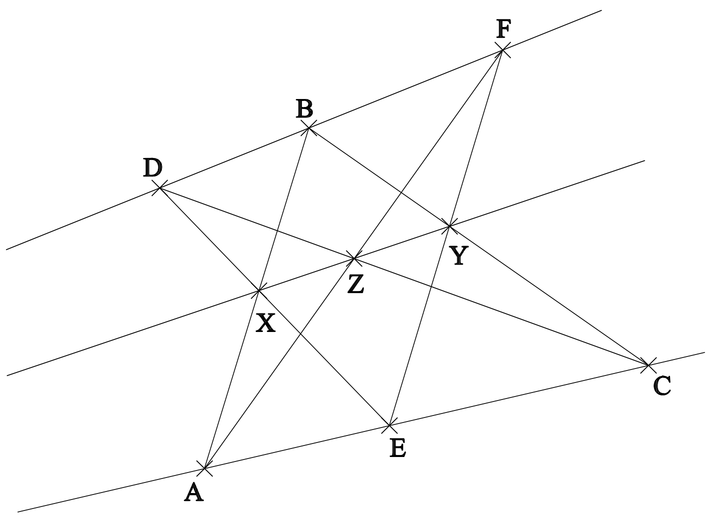
☺

Beweise durch einen Widerspruchsbeweis, dass der Kehrsatz des Satzes des Menelaos richtig ist.

<u>Anmerkung:</u>

Der "klassische" Satz von Pappus-Pascal kann auch folgendermaßen für zwei Geraden formuliert werden:

Liegen die Ecken eines Sechseckes ADCDEF abwechselnd auf zwei Geraden, so liegen die 3 Schnittpunkte von Gegenseitenpaaren auf einer Geraden.



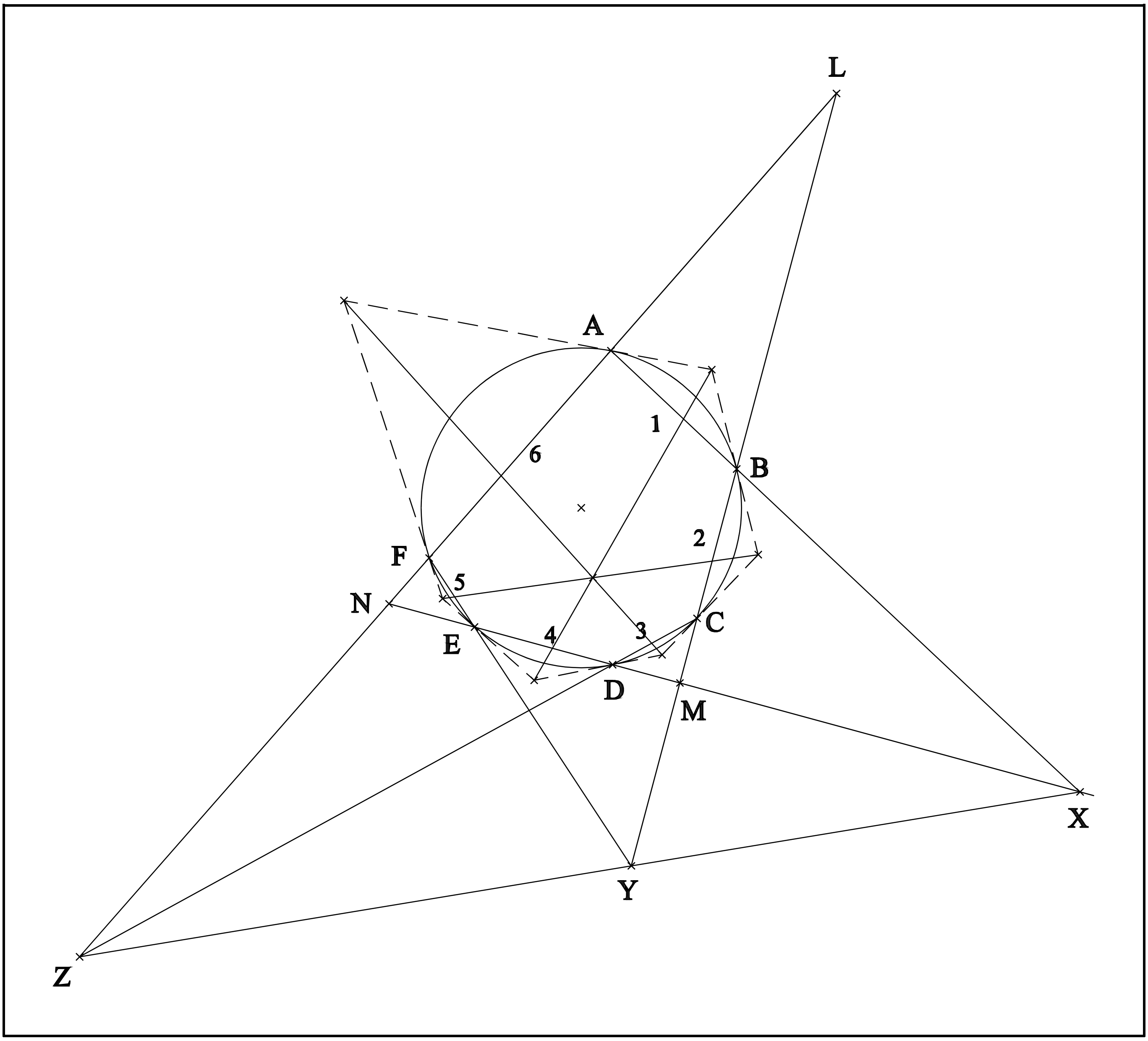
Anmerkung: (für besonders Interessierte):

In der (projektiven) Geometrie gibt es das Dualitätsprinzip zwischen Punkten und Geraden, d.h. man kommt zu äquivalenten Aussagen, wenn man Punkte und Geraden vertauscht.

Statt das Sehnenviereck im Kreis zu betrachten könnte man jeder Ecke eine Tangente an den Kreis zuordnen (bzw jeder Sehne den Schnittpunkt entsprechender Tangenten). Damit betrachten wir nun das entstandene Tangentensechseck.

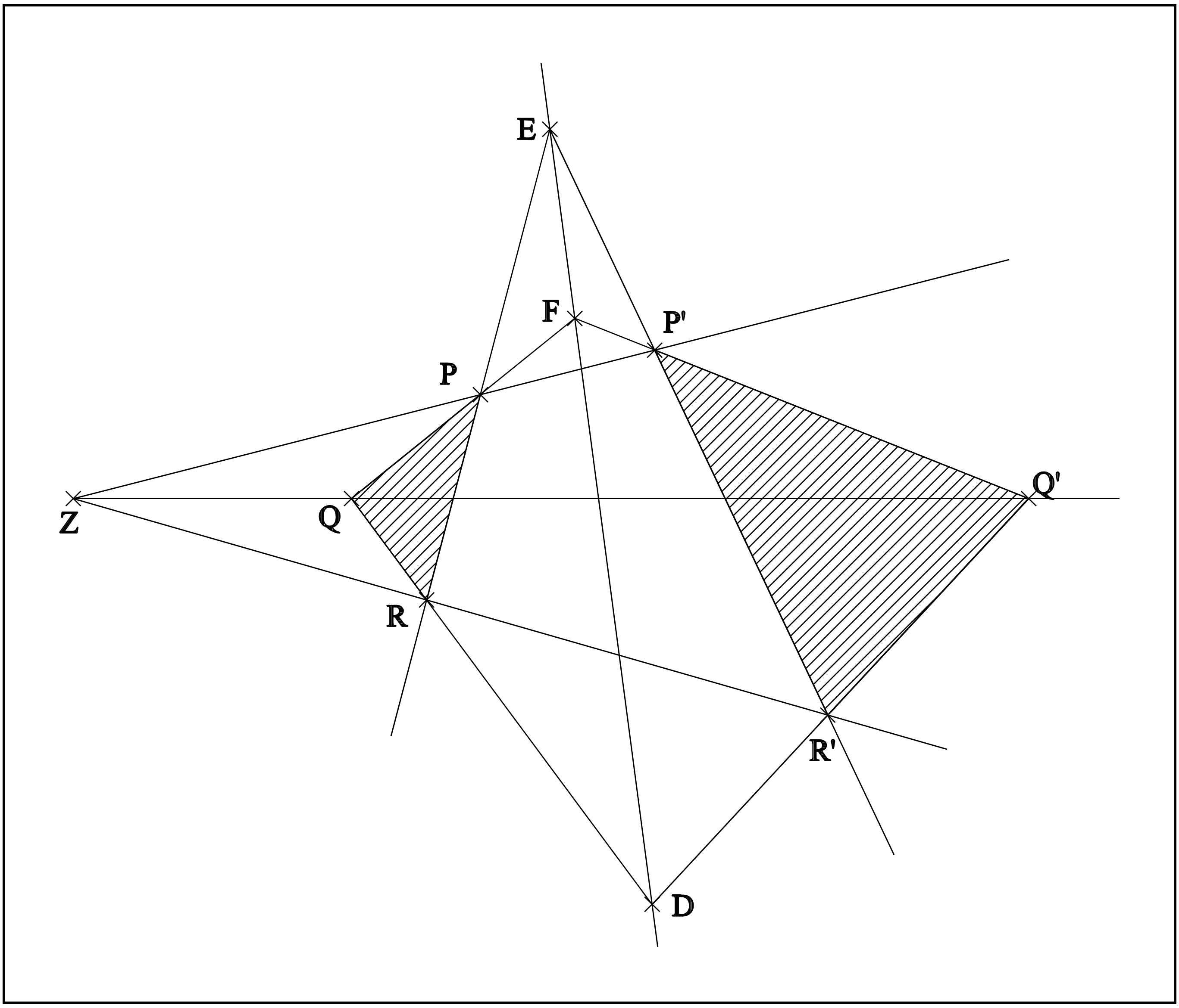
Satz des Brianchon:[1] Die 3 Verbindungslinien je zweier Gegenecken eines Tangentensechseckes schneiden sich in einem Punkt.

Dieser Satz ist der **duale Satz** zum **Satz von Pascal**.



[1] Charles Julien Brianchon, ✳ 19. 12. 1783 in Sèvres, ✝ 29. 04. 1864 in Versailles

Ein weiterer berühmter Satz der projektiven Geometrie ist der **Satz von Desargues**:[2]
Liegen zwei Dreiecke perspektiv bezüglich eines Punktes **Z** und schneiden sich die Paare entsprechender Seiten, dann liegen die 3 Schnittpunkte auf einer Geraden.

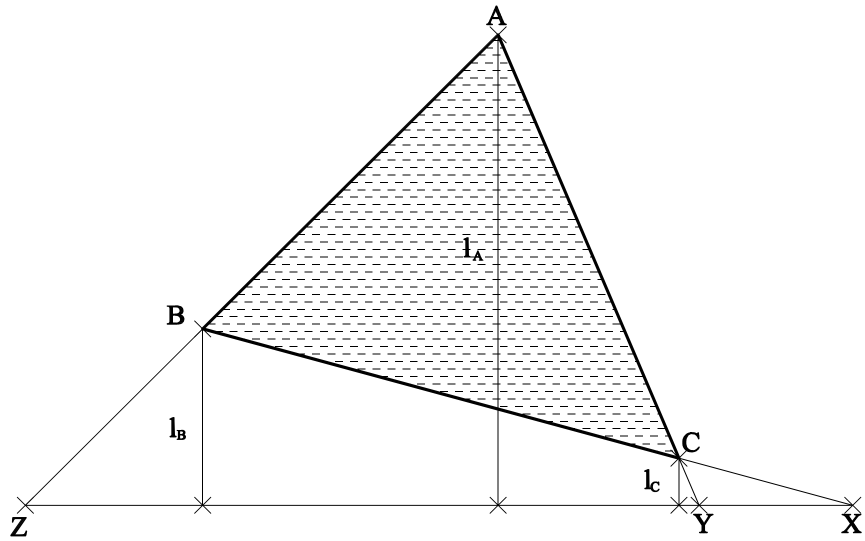


2 Girard Desargues, ✳ 21. 02. 1591 in Lyon, † ?. 09. 1661 in Lyon

Auch der Beweis des Satzes von Desargues basiert, wie der Beweis des Satzes von Pappus-Pascal, auf folgender Variante des Satzes des Menelaos:

Liegen die 3 Punkte X, Y, Z einerseits auf den (geeignet verlängerten) Seiten eines Dreieckes ΔABC, andererseits gemeinsam auf einer Geraden, dann gilt:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = 1$$



Der Beweis sollte dir mit Hilfe der Skizze nicht schwer fallen, sieht man doch 3 Strahlensatzfiguren mit den Zentren X, Y und Z. - Tipp: Finde zu den einzelnen Streckenverhältnissen der Behauptung entsprechende Streckenverhältnisse der Lote.

Der obige Satz, angewendet auf ΔZQR ergibt:
$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{RR'}}{\overline{ZR'}} \cdot \frac{\overline{ZQ'}}{\overline{QQ'}} = 1$$

Der obige Satz, angewendet auf ΔZRP ergibt:
$$\frac{\overline{RE}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PP'}}{\overline{ZP'}} \cdot \frac{\overline{ZR'}}{\overline{RR'}} = 1$$

Der obige Satz, angewendet auf ΔZPQ ergibt:
$$\frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} \cdot \frac{\overline{QQ'}}{\overline{ZQ'}} \cdot \frac{\overline{ZP'}}{\overline{PP'}} = 1$$

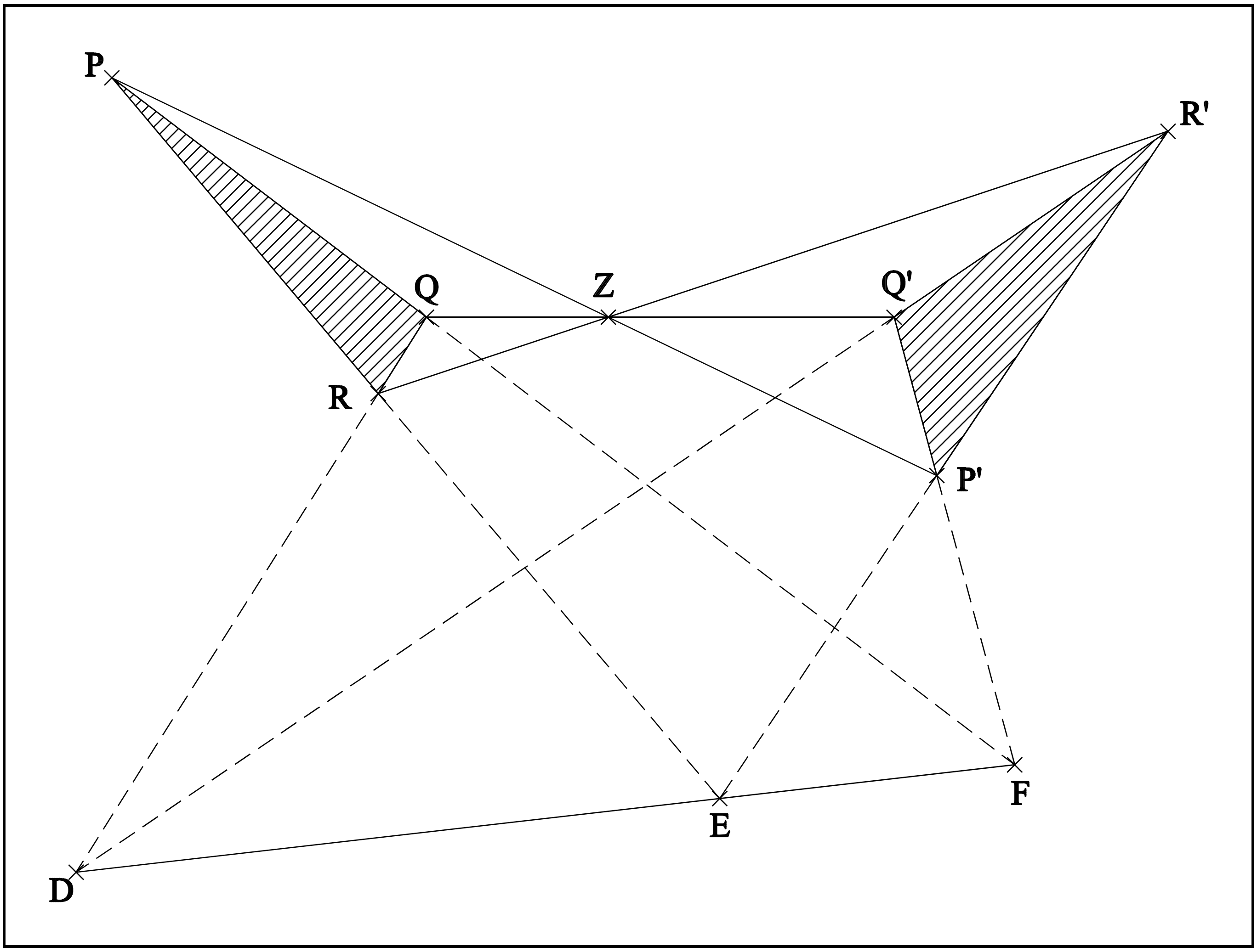
Nach Multiplikation der linken und der rechten Seiten folgt:
$$\boxed{\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{RE}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} = 1}$$

Aus dem Kehrsatz des Satzes des Menelaos folgt damit, dass die Punkte D, E, F auf einer Geraden liegen. ☺

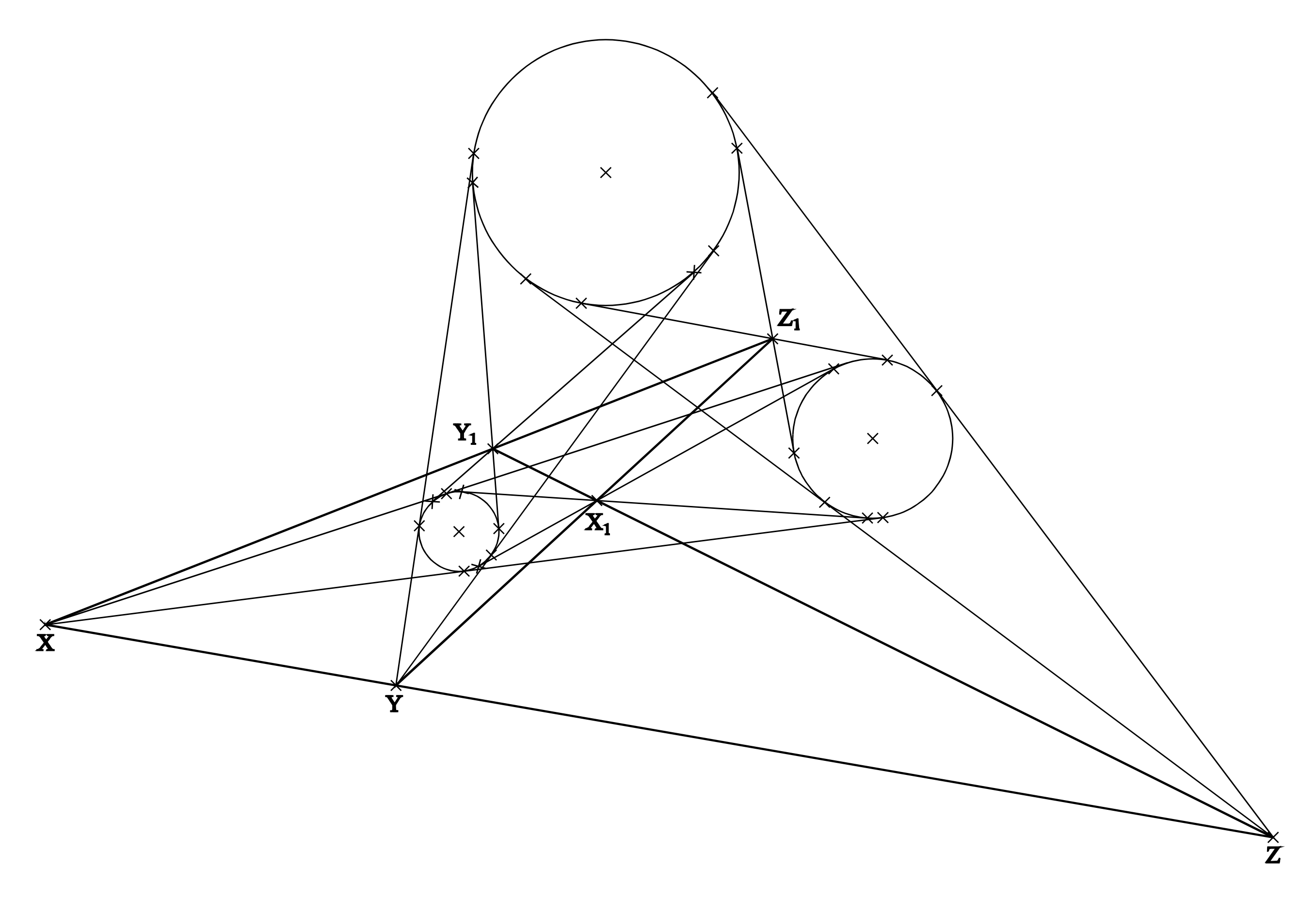
---

6. Untersuche graphisch, ob der Satz von Desargues auch gilt, wenn das Perspektivitätszentrum **Z** zwischen den beiden (perspektiven) Dreiecken liegt.

Mögliche Lösung zu 6.:



Nachtrag für Interessierte:



Der Satz von Monge:[3]

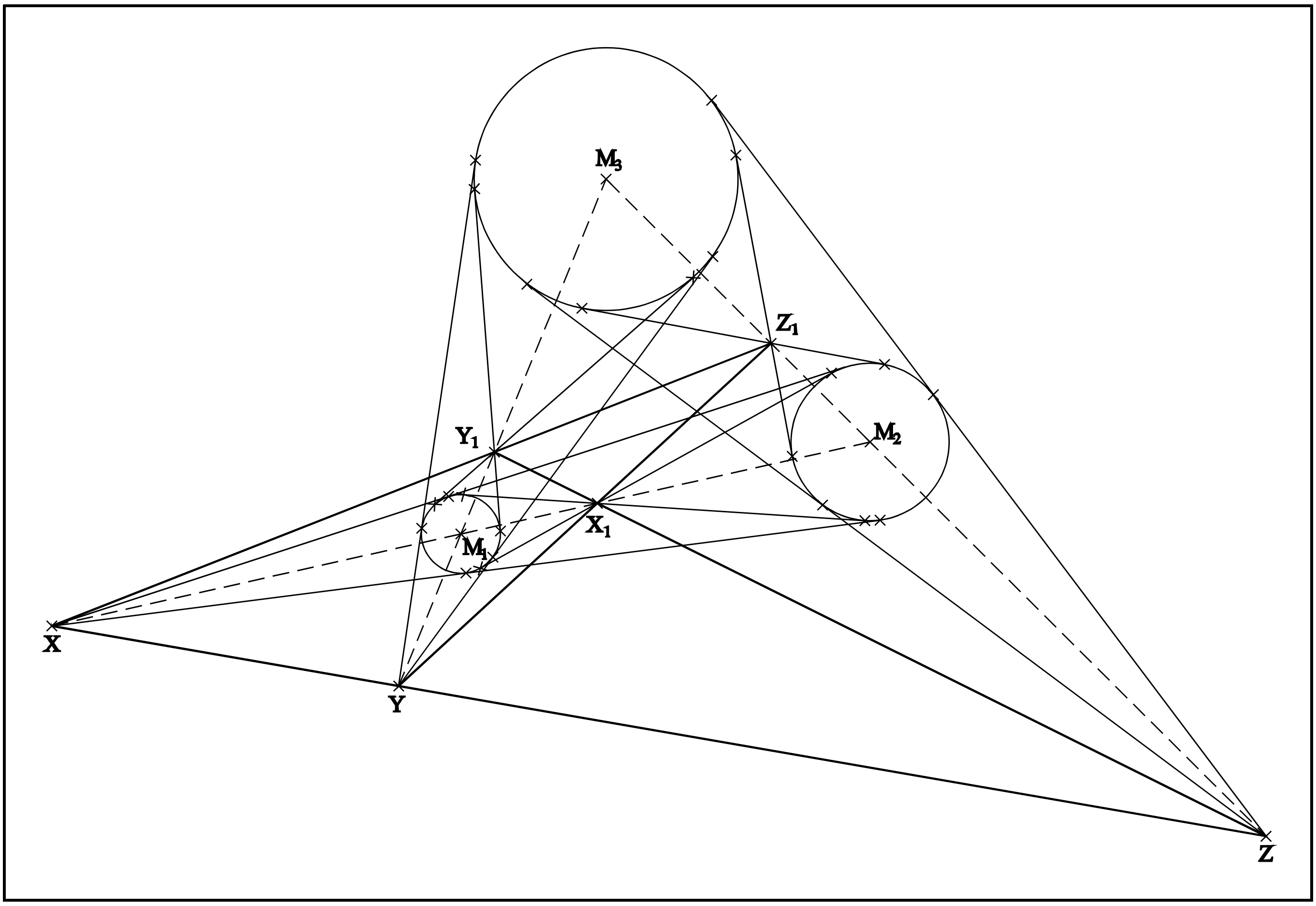
Gegeben sind 3 Kreise mit verschiedenen Radien.

a) Die Schnittpunkte der äußeren Tangentenpaare zu je zwei Kreisen (X, Y, Z) liegen auf einer Geraden.

b) Die Schnittpunkte zweier innerer Tangentenpaare und eines äußeren Tangentenpaares zu je zwei Kreisen (X, Y_1, Z_1), (X_1, Y, Z_1), (X_1, Y_1, Z) liegen jeweils auf Geraden.

[3] Gaspard Monge (Comte de Péluse), ✳ 10. Mai 1746 in Beaune; † 28. Juli 1818 in Paris

Zum Beweis des Satzes von Monge:



Zeichnet man das Dreieck, gebildet aus den Kreismittelpunkten, so verlaufen die Trägergeraden der Dreiecksseiten durch die Schnittpunkte X, Y und Z der äußeren Tangentenpaare. (Begründung?)

Beachtet man weiterhin, in welchem Verhältnis die Schnittpunkte der inneren Tangentenpaare die Seiten des Dreiecks $\Delta M_1M_2M_3$ teilen, so ist der Beweis eigentlich gar nicht so schwer zu führen. Die Beweisführung hat sicher etwas mit dem Satz des Menelaos (oder seinem Kehrsatz) zu tun.
Erinnere dich eventuell auch an den Satz, dass „eine Winkelhalbierende eines Dreiecks und die zugehörige Winkelhalbierende des Außenwinkels die Gegenseite[4] harmonisch teilen und zwar im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten“.

Versuche die Beweisführung!

4 Bezogen auf den äußeren Teilungspunkt ist natürlich die Verlängerung der Gegenseite gemeint.