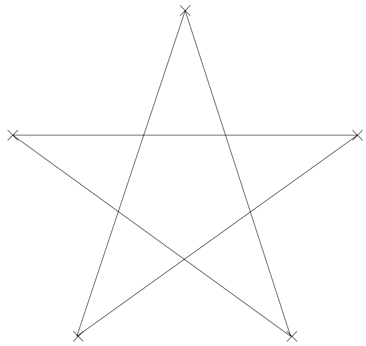
Goldener Schnitt
Was war das große Geheimnis der Pythagoräer?

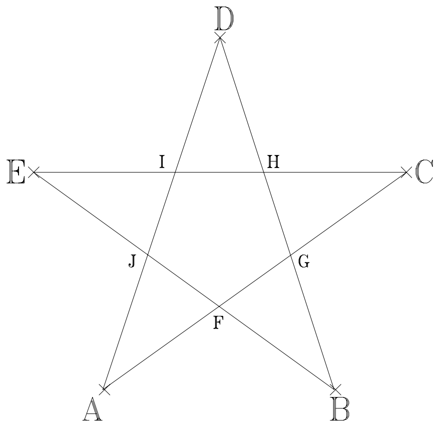
Das Pentagramm



Der Drudenfuß

Das Pentagramm war das Zeichen des Geheimbundes der Pythagoräer, und diese “geheimnisvolle” Figur gilt schon seit alters her als magisches Symbol. So fand es z.B. in früherer Zeit, genannt: Drudenfuß, auch als Zeichen gegen Zauberei Verwendung. - Was ist denn nun das Geheimnisvolle dieser geometrischen Figur?

Die Pythagoräer hatten entdeckt, dass man Strecken mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, die nicht messbar (kommensurabel) sind; bekanntlich sind z.B. Strecken mit irrationaler Streckenlänge inkommensurabel.



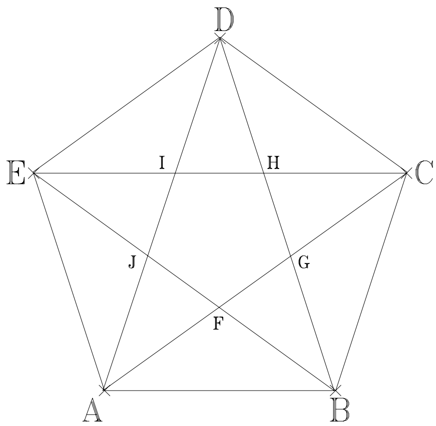
Wenn die Pythagoräer das Pentagramm als ihr Erkennungszeichen gewählt haben so ist zu vermuten, dass hier irrationale Streckenlängenverhältnisse auftauchen.

Zunächst einmal wurden die Punkte sinnvoll bezeichnet. - Wie konstruiert man eigentlich eine solche Figur?

....

<u>Aufgaben:</u> Zeichne in dein Heft ein regelmäßiges 5-Eck mit der Seitenkante **s** = 6 cm. - Begründe, warum ein Innenwinkel jeweils 108°, ein Außenwinkel jeweils 72° groß ist.

Bezeichne die 5 Eckpunkte wie in der nebenstehenden Figur und zeichne die 5 Linien des Pentagramms ein.



Eine Linie des Pentagramms habe die Länge **d**, d.h. es gilt z.B.: $\mathbf{d} = \overline{EC}$.

Untersuche deine Figur auf: (1) gleiche Winkelgrößen, (2) parallele Strecken, (3) Achsensymmetrie. - Begründe deine Untersuchungen!

<u>Es gilt:</u> □ABHE ist ein Parallelogramm und AB ∥ EC.

Wir bilden das Streckenverhältnis: **s** : **d** !

....

Goldener Schnitt
Was war das große Geheimnis der Pythagoräer?

Aufgabe: Begründe, dass gilt: $\dfrac{\mathbf{s}}{\mathbf{d}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{EH}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \dfrac{\overline{HC}}{\overline{EH}}$ [1]

Damit wird die Strecke EC durch den Punkt H **harmonisch** geteilt!

$$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{d}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{EH}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s}^2 = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{s})$$

Bestätige durch Lösung der quadratischen Gleichung in **s**, dass gilt: $\mathbf{s} = -\frac{\mathbf{d}}{2} + \frac{\mathbf{d}}{2} \cdot \sqrt{5}$.

Das Verhältnis: $\dfrac{\mathbf{s}}{\mathbf{d}} = \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}}{1} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

ist das berühmte Verhältnis des goldenen Schnittes, das aber üblicherweise in der Form: “Längere Seite” zu “Kürzere Seite” angegeben wird, also:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{s}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)}{\left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} =: \mathbf{\Phi}$$

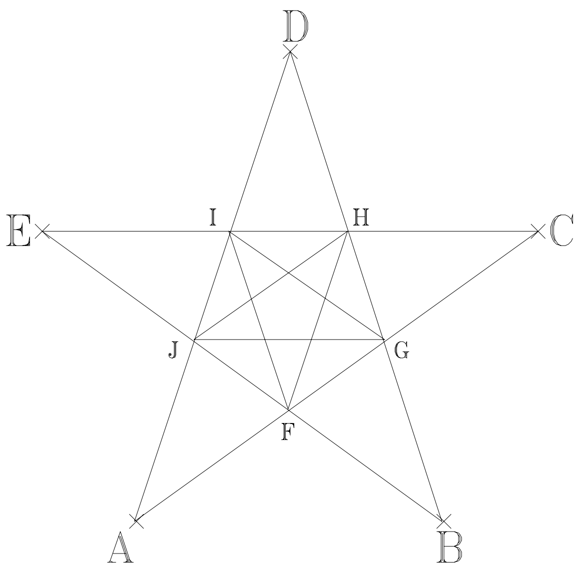
Den griechischen Buchstaben Φ für dieses Verhältnis hat man zu Ehren von ΦΙΔΙΑΣ (Phidias) gewählt.

(Hausaufgabe) Versuche in geeigneter Literatur, oder Recherche im Internet etc., Informationen über Phidias zu erhalten. - Vielleicht kannst du auch im Kunstunterricht etwas über den goldenen Schnitt, den Parthenon-Tempel oder den Bildhauer Phidias erfahren.

Φ ist also ein irrationales Zahlenverhältnis, womit das Geheimnis der Pythagoräer gelüftet wäre!

Aufgaben:

1) Berechne die Streckenlänge von **d** für **s** = 6 cm.
2) Berechne die Streckenlänge von **s** für **d** = 10 cm.
3) Berechne die Streckenlänge $\overline{JH}$ für **d** = 10 cm.
4) Zeichne in das innere 5-Eck ein weiteres Pentagramm, in das entstehende neue 5-Eck ein weiteres Pentagramm, in das entstehende neue 5-Eck ein weiteres Pentagramm, ...



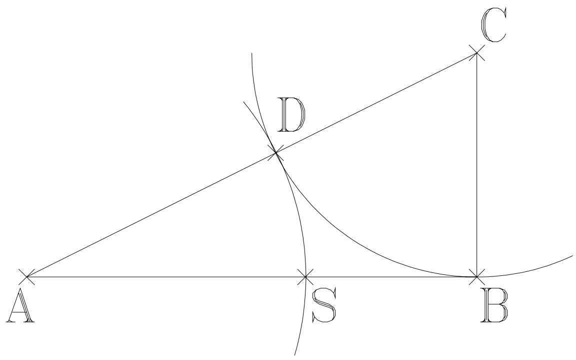
---

[1] Strahlensatz mit Zentrum F, Parallelogrammeigenschaften und kongruente Teilfiguren!

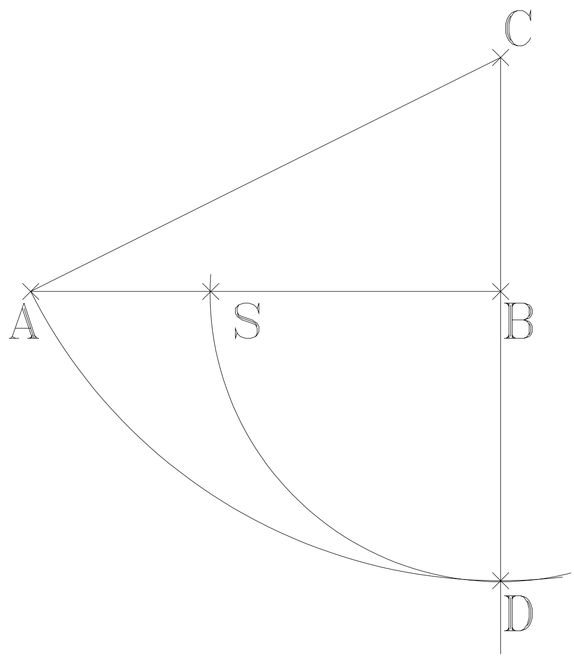
Goldener Schnitt
Was war das große Geheimnis der Pythagoräer?

Wie findet man nun einen Teilungspunkt **S**, der eine beliebige Strecke **AB** im goldenen Schnitt teilt?[2]

(a)



(b)



Für beide Fälle (a) und (b) sei der Ausgangspunkt der Konstruktion die Strecke AB.

<u>Aufgaben:</u> Analysiere die beiden Figuren und fertige im Heft eine entsprechende Konstruktion mit zugehöriger Konstruktionsbeschreibung an.[3]

Beweise: In beiden Fällen teilt der Punkt **S** die Strecke **AB** harmonisch, d.h. im ***Goldenen Schnitt***.

Eine "letzte" Besonderheit: **Leonardo Fibonacci** von Pisa hat sich u.a. damit beschäftigt, wie sich bei gleichbleibender Vermehrung Populationen entwickeln. - Er kam dabei auf die nach ihm benannte Folge von Fibonacci-Zahlen, bei der, beginnend mit 2 Einsen, die nachfolgende Zahl stets die Summe der beiden Vorgänger ist.

Mit dieser Vorschrift ergibt sich: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

<u>Aufgaben:</u> Setze die Folge noch durch 11 weitere Folgenglieder fort und bilde mit dem TR eine neue Folge von Quotienten zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen, d.h. es beginnt mit: $\frac{1}{1}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; ... (TR-Genauigkeit: 3 Nachkommastellen). - Fällt dir etwas auf?

Versuche in geeigneter Literatur, oder Recherche im Internet etc., Informationen über **Leonardo Fibonacci** von Pisa zu erhalten.

Da die Fibonnaci-Zahlen viel mit Wachstum zu tun haben ist es möglicherweise nicht verwunderlich, dass z.B. die Anzahl der Blütenblättern von Blumen stets eine Fibonacci-Zahl ist. - Bei der Sonnenblume 34? - Nachzählen!

---

[2] <u>Quelle:</u> Beutelsbacher/Petri: Der Goldene Schnitt; BI Wissenschaftsverlag

[3] Hast du erkannt: $\left(\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\right) \wedge (BC \perp AB)$?

Nachtrag:

a) Auch mit der folgenden Formel von Jacques Binet[4] kann man Fibonacci-Zahlen bestimmen, ohne stets die Folge von vorne „aufbauen“ zu müssen. - Probiere es aus!

$$\boxed{f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}}$$

---

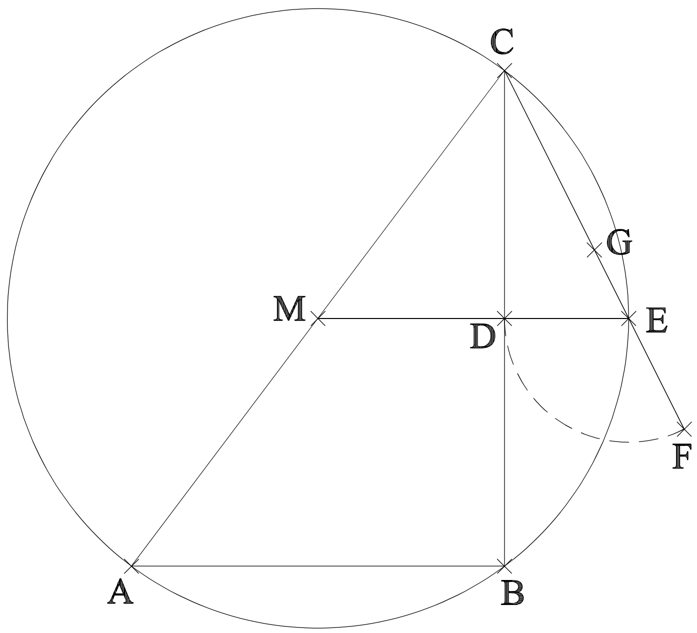
b) Aufgabe:

Es gelte: $\overline{AC} = 5$

Analysiere die nebenstehende Figur.

$\overline{AB} = ?$

Beweise: $\overline{CG} = \Phi$



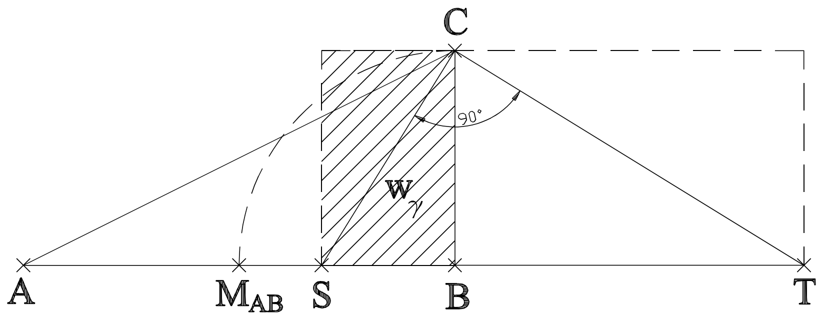
---

c) Aufgabe (schwieriger):

Analysiere die nebenstehende Figur.

Beweise:

$\frac{\overline{CB}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{TB}}{\overline{BC}} = \Phi,$



d.h. das schraffierte Rechteck (ebenso das rechts anschließende Rechteck) ist ein goldenes Rechteck.

---

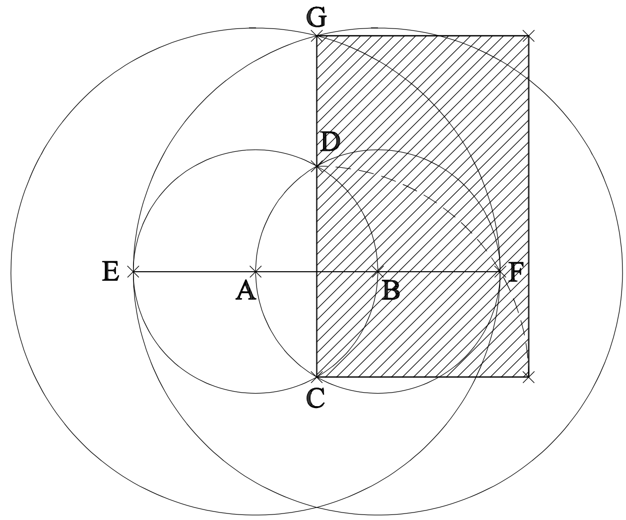
[4] Jacques Phillipe Marie **Binet**, ✳ 02.02.1786 in Rennes (Bretagne; Frankreich), † 12.05.1856 in Paris (Frankreich)

d) Aufgabe:

Analysiere die nebenstehende Figur.

Beweise: $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{CD}} = \Phi$

d.h. das schraffierte Rechteck ist ein goldenes Rechteck.

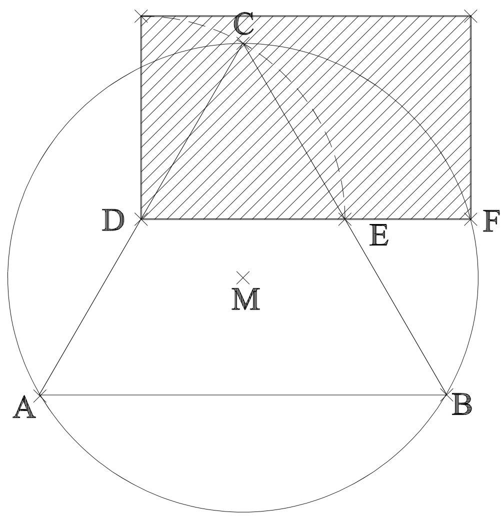


e) Aufgabe:

Analysiere die nebenstehende Figur.

Untersuche, ob gilt: $\dfrac{\overline{DF}}{\overline{DE}} = \Phi$

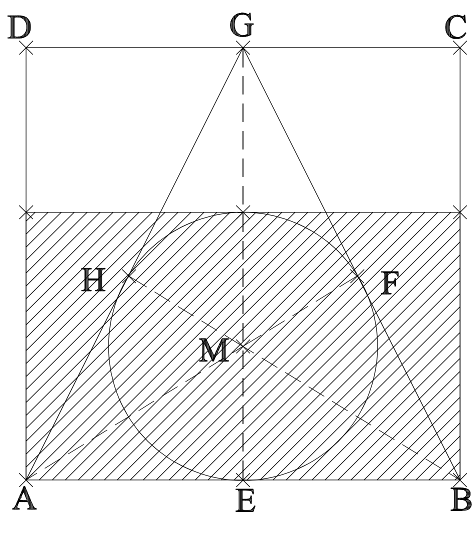
d.h. ob das schraffierte Rechteck ein goldenes Rechteck ist.[5]



f) Aufgabe:

Analysiere die nebenstehende Figur.

Beweise, dass das schraffierte Rechteck ein goldenes Rechteck ist.



5 Quelle: Kurt Hofstetter: A Simple Construction of the Golden Section; Forum Geometricorum, Volume 2 (2002) 65 - 66

g) Zu Beginn haben wir am Pentagramm die Gleichung: $\mathbf{s^2 = d \cdot (d - s)}$ hergeleitet, wobei **s** die Sehnenlänge des regelmäßigen Fünfecks beschreibt und **d** die Diagonalenlänge.[6]

Zeige, dass diese Gleichung äquivalent ist zu:

$$\boxed{\left(\frac{d}{s}\right)^2 = \frac{d}{s} + 1 \;\Leftrightarrow\; \Phi^2 = \Phi + 1 \;\Leftrightarrow\; \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}}$$

Wir verwenden nun die letzte Gleichung für eine „Kettenbruchentwicklung“, indem wir auf der rechten Seite stets wieder den Ausdruck für Φ einsetzen.[7]

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}\,;\quad \Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}}} = \;....$$

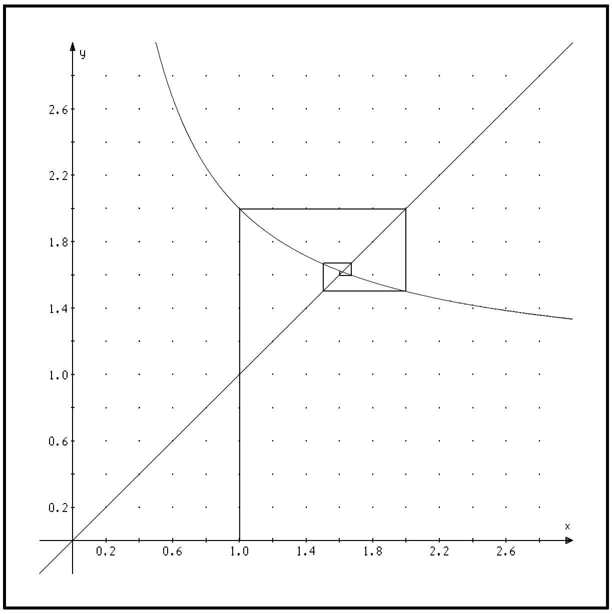
1. Näherung: $\Phi_1 := 1$

2.Term: $\Phi_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$

3.Term: $\Phi_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

4.Term: $\Phi_4 = 1 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$

5.Term: $\Phi_5 = 1 + \cfrac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5}$



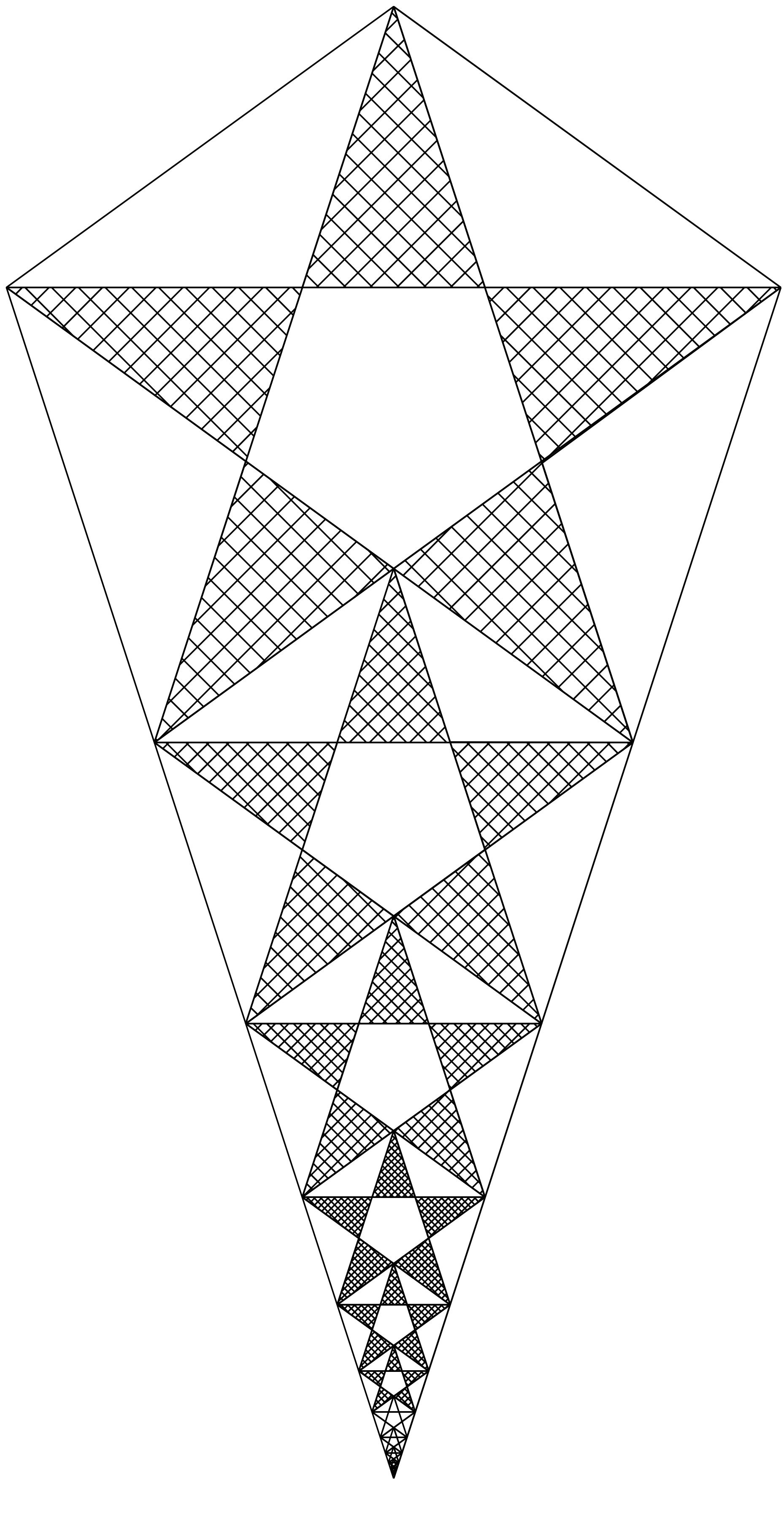
Wie wird es wohl weitergehen? - Führe mindestens 3 weitere Schritte durch! - Beschrifte in der Graphik die beiden Funktionsgraphen mit der zugehörigen Funktionsgleichung. Kennzeichne den Schnittpunkt durch ein geordnetes Paar. - Könnte man auch mit einer anderen Zahl beginnen?

6 Diese Gleichung erhält man auch z.B. aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔABD und ΔABG. - Zeige das!

7 Man kann dies natürlich auch als Iteration: $\Phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\Phi_n}$, hergeleitet über eine Schnittpunktsproblematik interpretieren. Erinnere dich an das Vorgehen beim Verfahren von Heron.

Goldener Schnitt

Was war das große Geheimnis der Pythagoräer?



Goldener Schnitt
Was war das große Geheimnis der Pythagoräer?

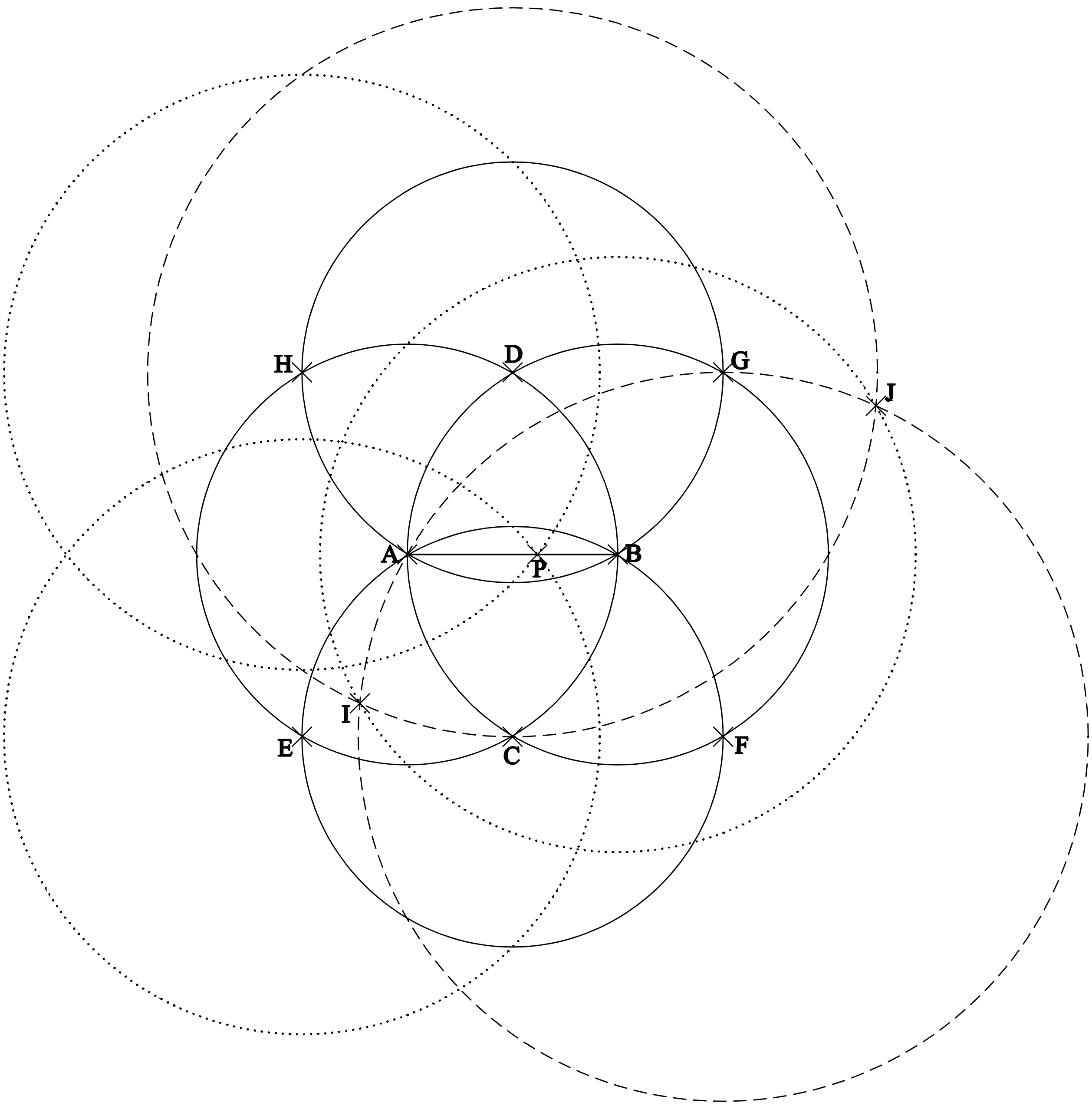
Für besonders Interessierte:

Die vorherigen Untersuchungen haben ergeben, dass sich der Quotient zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen dem Verhältnis des Goldenen Schnitts nähert. Der französische Mathematiker François Edouard Anatole **Lucas** (✳ 04. 04.1842 Amiens; † 03. 10. 1891 Paris) hat u.a. mit dem gleichen Bildungsgesetz, dass ein Folgenglied die Summe seiner Vorgänger ist, jedoch mit den Anfangsgliedern $\mathbf{l_0} := 2$ und $\mathbf{l_1} := 1$ die Folge der Lucas-Zahlen gebildet und die Auswirkungen untersucht (z.B. gilt: $\mathbf{l_{n+1}} = \mathbf{f_{n-1}} + \mathbf{f_{n+1}}$).
Stelle eigene Untersuchungen an!

n	f_{n-1}	f_n	f_{n+1}	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$	l_{n-1}	l_n	l_{n+1}	$\frac{l_{n+1}}{l_n}$
1	1	1	2	2,0000000000	2	1	3	3,0000000000
2	1	2	3	1,5000000000	1	3	4	1,3333333333
3	2	3	5	1,6666666667	3	4	7	1,7500000000
4	3	5	8	1,6000000000	4	7	11	1,5714285714
5	5	8	13	1,6250000000	7	11	18	1,6363636364
6	8	13	21	1,6153846154	11	18	29	1,6111111111
7	13	21	34	1,6190476190	18	29	47	1,6206896552
8	21	34	55	1,6176470588	29	47	76	1,6170212766
9	34	55	89	1,6181818182	47	76	123	1,6184210526
10	55	89	144	1,6179775281	76	123	199	1,6178861789
11	89	144	233	1,6180555556	123	199	322	1,6180904523
12	144	233	377	1,6180257511	199	322	521	1,6180124224
13	233	377	610	1,6180371353	322	521	843	1,6180422265
14	377	610	987	1,6180327869	521	843	1364	1,6180308422
15	610	987	1597	1,6180344478	843	1364	2207	1,6180351906
16	987	1597	2584	1,6180338134	1364	2207	3571	1,6180335297
17	1597	2584	4181	1,6180340557	2207	3571	5778	1,6180341641
18	2584	4181	6765	1,6180339632	3571	5778	9349	1,6180339218
19	4181	6765	10946	1,6180339985	5778	9349	15127	1,6180340143
20	6765	10946	17711	1,6180339850	9349	15127	24476	1,6180339790
21	10946	17711	28657	1,6180339902	15127	24476	39603	1,6180339925
22	17711	28657	46368	1,6180339882	24476	39603	64079	1,6180339873
23	28657	46368	75025	1,6180339890	39603	64079	103682	1,6180339893
24	46368	75025	121393	1,6180339887	64079	103682	167761	1,6180339885
25	75025	121393	196418	1,6180339888	103682	167761	271443	1,6180339888

Goldener Schnitt
Was war das große Geheimnis der Pythagoräer?

Man kann auch eine vorgegebene Strecke AB nur unter Verwendung des Zirkels im Verhältnis des goldenen Schnitts (durch einen Punkt P) teilen, indem man vier Kreise mit Radius $\overline{AB}$ und den Mittelpunkten A, B, C und D zeichnet.
Danach konstruiert man zwei Kreise mit Radius $\overline{DC}$ und den Mittelpunkten D und F. Am Schluß zeichnet man zwei Kreise mit Radius $\overline{IB}$ und den Mittelpunkten E und H. - Probiere es aus und bestätige die Richtigkeit durch eine dir bekannte Konstruktion unter Verwendung des Geodreiecks.[8]



Für einem möglichen Beweis setze $\overline{AB} := 1$ und zeige unter Verwendung von Symmetrien (geeigneten gleichschenkligen Dreiecken) und dem Satz des Pythagoras, dass dann gilt: $\overline{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8 Quelle: Michael Bataille: Another Compass-Only Construction .... ; Forum Geometricorum Volume 8 (2008)