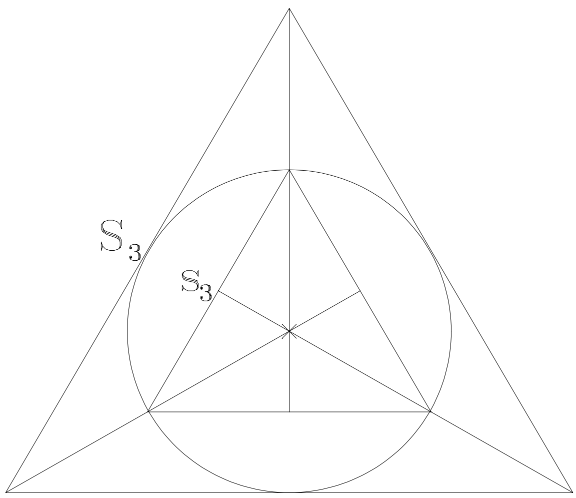
Berechnung von π ($2\cdot\pi$)



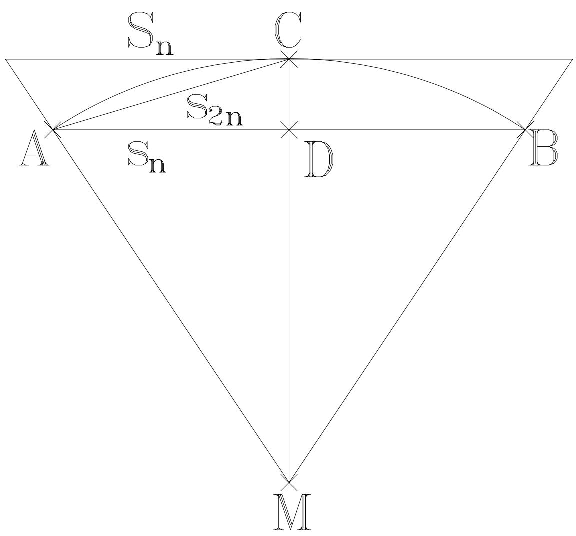
Einstieg in das Archimedische Verfahren:

Es gilt für das ein- und das umbeschriebene regelmäßige Dreieck:

$$s_3^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot s_3\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\cdot r\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}\cdot s_3^2 = \frac{9}{4}\cdot r^2 \quad \Rightarrow \quad s_3 = r\cdot\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad u_3 = 3\cdot\sqrt{3}\cdot r \;; \quad U_3 = 2\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot r$$



Es gilt für den Zusammenhang ein- und umbeschriebener Polygone:

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{r}{\overline{MD}}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{r\cdot s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}} = \frac{2\cdot r\cdot s_n}{\sqrt{4\cdot r^2 - s_n^2}}$$

Entwicklung einer Iterationsformel:

Es gilt bei Verdopplung der Eckenanzahl für die Länge der Sehne der einbeschriebenen regelmäßigen Polygone:

$$s_{2n}^2 = \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{DC}\right)^2$$

$$= \frac{s_n^2}{4} + \left(r - \overline{MD}\right)^2$$

$$= \frac{s_n^2}{4} + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)^2$$

$$= \frac{s_n^2}{4} + r^2 - 2\cdot r\cdot\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} + r^2 - \frac{s_n^2}{4}$$

$$= 2\cdot r^2 - 2\cdot r\cdot\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$$

$$= 2\cdot r^2 - r\cdot\sqrt{4\cdot r^2 - s_n^2}$$

Offensichtlich gilt: (1) $u_n < U_K < U_n$; (2) $u_{n-1} < u_n$ und $U_{n-1} > U_n$; (3) $U_n - u_n \to 0$ für $n \to \infty$

Berechnung von π ($2\cdot\pi$)

n	s_n	u_n	S_n	U_n
3	1,73205081	5,19615242	3,46410162	10,39230485
6	1,00000000	6,00000000	1,15470054	6,92820323
12	0,51763809	6,21165708	0,53589838	6,43078062
24	0,26105238	6,26525723	0,26330500	6,31931988
48	0,13080626	6,27870041	0,13108693	6,29217243
96	0,06543817	6,28206390	0,06547322	6,28542920
192	0,03272346	6,28290494	0,03272784	6,28374610
384	0,01636228	6,28311522	0,01636283	6,28332549
768	0,00818121	6,28316778	0,00818128	6,28322035
1536	0,00409061	6,28318093	0,00409062	6,28319407

Die obigen, tabellarischen Näherungswerte (8 Nachkommastellen) beziehen sich auf einen Einheitskreis!

Es wird definiert: $U_K(r=1) =: 2\cdot\pi$

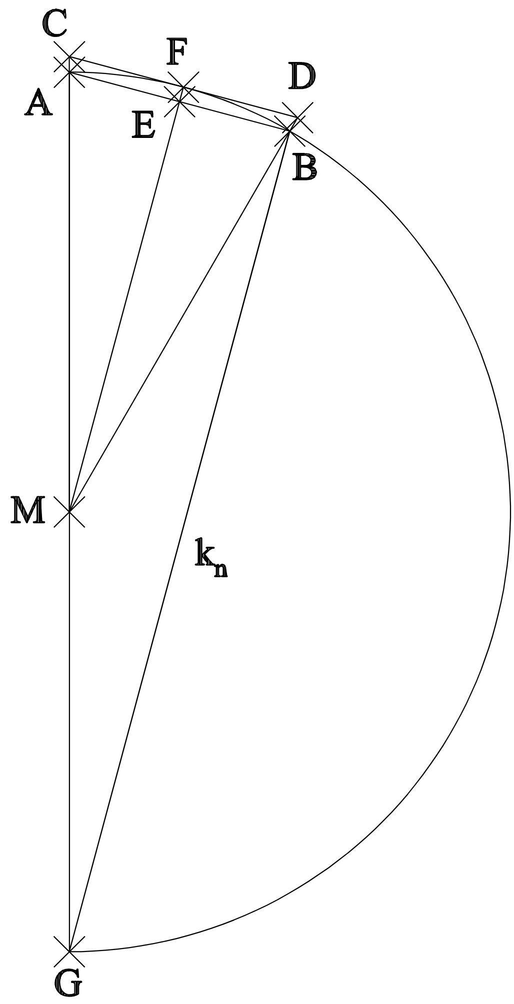
Damit ist: $6,28318093 < 2\cdot\pi < 6,28319407$ $3,14159047 < \pi < 3,14159704$

$\pi \approx$ 3, 1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089
9986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174
5028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678
3165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724587006606
315588174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951
941511609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567
351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737190702
179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785
771342757789609173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542
019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951
059731732816096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171010003
137838752886587533208381420617177669147303598253490428755468731159562863882353
787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198938095257201065
485863278865936153381827968230301952035301852968995773622599413891249721775283
479131515574857242454150695950829533116861727855889075098381754637464939319255
060400927701671139009848824012858361603563707660104710181942955596198946767837
449448255379774726847104047534646208046684259069491293313677028989152104752162
056966024058038150193511253382430035587640247496473263914199272604269922796782
354781636009341721641219924586315030286182974555706749838505494588586926995690
927210797509302955321165344987202755960236480665499119881834797753566369807426
542527862551818417574672890977772793800081647060016145249192173217214772350141
441973568548161361157352552133475741849468438523323907394143334547762416862518
983569485562099219222184272550254256887671790494 60 ....

usw.

Berechnung von π ($2\cdot\pi$)

Eigentlich haben wir bei dem Nachweis, dass durch die Folge der Intervalle [u_n ; U_n] eine Intervallschachtelung definiert ist, etwas “geschlampt”, denn wir haben nicht nachgewiesen, dass die Intervalllänge für immer größeres n beliebig klein wird.[1]



Dieses Versäumnis soll nun nachgeholt werden. - In der nebenstehenden Skizze gilt:

$$AB = s_n \; ; \; CD = S_n \; ; \; \overline{AG} = 2$$

Selbstverständlich sind A, F, B, G Punkte eines Einheitskreises um den Mittelpunkt M.

Begründe die folgenden Beziehungen:

(1) $$k_n^2 = 4 - s_n^2$$

(2) $$\frac{S_n}{s_n} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}}$$

(3) $$\frac{S_n}{s_n} = \frac{2}{\sqrt{4 - s_n^2}}$$

(4) $$\frac{U_n}{u_n} = \frac{2}{k_n}$$

(5) $$\boxed{U_n - u_n = u_n \cdot \frac{2}{k_n} - u_n = u_n \cdot \left(\frac{2}{k_n} - 1 \right)}$$

Für immer größeres n nähert sich k_n der Länge des Durchmessers (2) und damit wird die rechte Klammer beliebig klein.

Wie man sich doch irren kann - Das Problem: “$\infty \cdot 0$"

Der Schüler A. Made mault: “Wozu denn der ganze Aufwand mit der Intervallschachtelung. Die Annäherung von innen (durch Untersummen) reicht doch! - Die Sehnenlängen werden immer kleiner und damit werden wir automatisch immer genauer!”

Seine Nachbarin G. Pfiffig ist skeptisch und meint: “Das ist schon richtig; die Sehnenlängen werden immer kleiner, aber dafür werden es auch immer mehr! - Könnte es nicht sein, dass .... ?!“

---

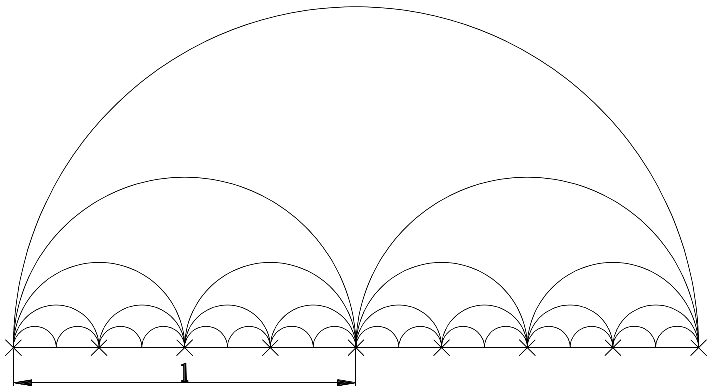
[1] Außerdem haben wir die Eckenanzahl stets verdoppelt, so dass nicht jede natürliche Zahl als Eckenanzahl vorkommt.

Berechnung von π ($2\cdot\pi$)

Paradox oder nicht?

a) Bestätige, dass für die Umfangslängen der immer kleineren werdenden Halbkreise gilt:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \pi \\
2\cdot U_2 &= \pi \\
4\cdot U_4 &= \pi \\
8\cdot U_8 &= \pi \\
16\cdot U_{16} &= \pi \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &= \pi
\end{aligned}
$$



Bei immer feinerer Unterteilung wird durch die Summe der Halbkreise der Durchmesser approximiert. Also gilt:

$$\mathbf{2 = \pi},$$

d.h. Umfang des Halbkreises und der Durchmesser des Kreises sind gleich groß!

b) Für die Umfangslänge **U** des Viertelkreises gilt sicherlich:

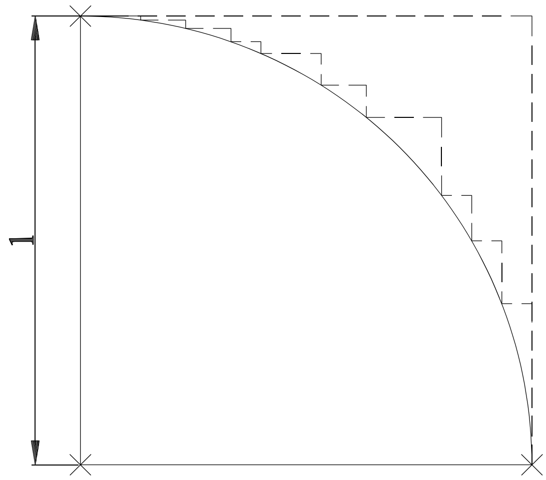
$$\mathbf{U} = \frac{\pi}{2}$$

Bestätige, dass für die Approximation $\mathbf{U_T}$ der Viertelkreislinie durch die gestrichelt gezeichneten (Treppen-) Linien stets gilt:

$$\mathbf{U_T} = 2$$

unabhängig davon, wie fein man die Einteilung wählt. Daraus folgt unter dem Gesichtspunkt einer immer feineren Unterteilung:

$$\boldsymbol{\pi} = 4$$



Fazit: Wenn man die Maßzahl des Kreisumfangs nicht (sauber) als innere Zahl einer **Intervallschachtelung** auffasst und (näherungsweise) bestimmt, so kann man zu erstaunlichen Widersprüchen gelangen! - Das Problem: “immer kleiner” aber dafür “immer größere Anzahl”, schlampig gesprochen das Problem “$0 \cdot \infty$” ist in der Mathematik ganz schön schwierig.