Rekonstruktion eines teilweise entschlüsselten babylonischen Keilschrifttextes aus der Zeit um 2000 v. Chr.

16	9	25	4	3	5
144	25	169	12		13
	49	625	24	7	25
9		25	3		
64		100	8		
225	64	289	15		
144		225			15
1296	225	1521		15	39
5184		5625		21	75
36			6	8	10
256	144	400	16	12	20
	256		30	16	34
	225	289	8	15	
400	441		20	21	
3136	1089			33	

Rekonstruiere die leeren Felder sinnvoll!

Wie lautet das Konstruktionsprinzip bzw. der Zusammenhang der einzelnen Zahlen?

Pythagoräische Zahlentripel
... und was folgt daraus ?

Es gilt:

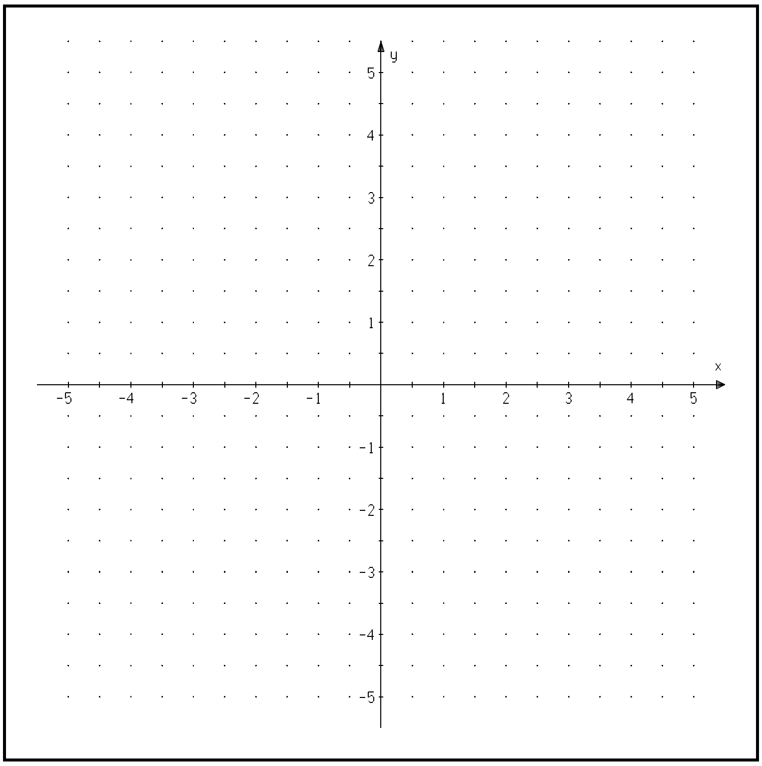
$$3^2 + 4^2 = 5^2 = 25$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2 = 169$$
....

Wir wollen den Sachverhalt einmal genauer untersuchen und wählen dazu, der Anschaulichkeit wegen, eine graphische Darstellung. - Wo liegen eigentlich alle Punkte (x | y) im Koordinatensystem, für die gilt:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 16} \qquad (\ast)$$

wobei wir als Grundmenge für die Einsetzungen in x und y jeweils die reellen Zahlen zulassen wollen.

Aufgaben:



1. Löse die Gleichung ($\ast$) nach y auf und gib eine sinnvolle Definitionsmenge für die Einsetzungen für x an.

2. Fertige eine sinnvolle Wertetabelle an (maximale Schrittweite: 0,5) und übertrage die geordneten Paare als Punkte in das nebenstehende Koordinatensystem.

3. Skizziere den Graphen, auf dem alle Punkte liegen, geeignet.

4. Begründe: Dein Graph aus 3. stellt nicht den Graphen einer Funktion dar.

5. Beweise: Ein beliebiger Punkt eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt, erfüllt stets die Gleichung: $x^2 + y^2 = r^2$.

Die Gleichung ($\ast$) kann man auch so schreiben: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Was ändert sich eigentlich am Graphen, wenn man den einen Nenner verändert in: $\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$?

Aufgaben:

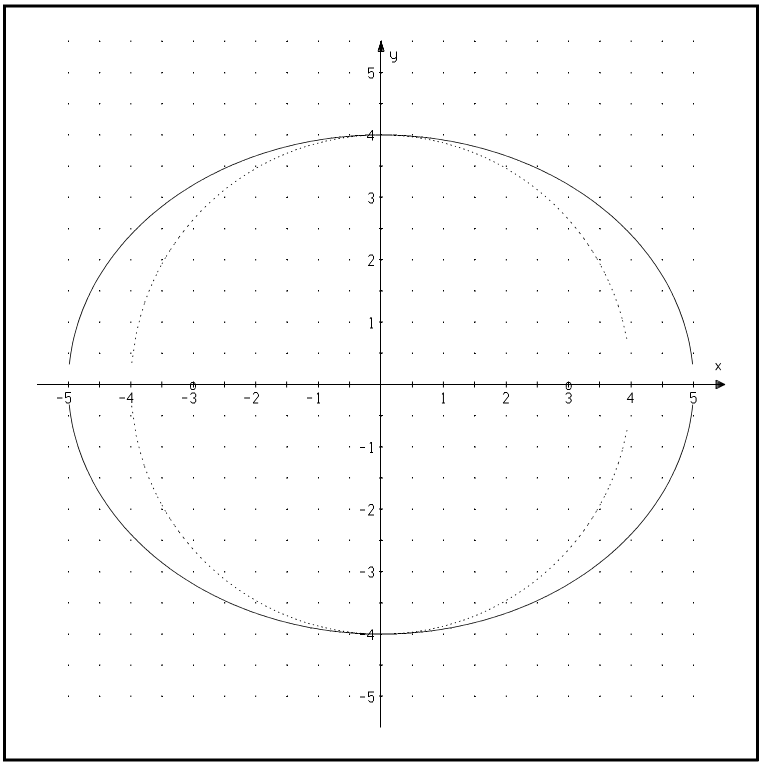
6. Löse die veränderte Gleichung wiederum nach y auf und gib eine sinnvolle Definitionsmenge für die Einsetzungen für x an.

7. Fertige eine neue, sinnvolle Wertetabelle an (maximale Schrittweite: 0,5) und übertrage die geordneten Paare als Punkte in dasselbe, obige Koordinatensystem. - Was bewirkt die Änderung: 16 → 25 ?

Pythagoräische Zahlentripel

... und was folgt daraus ?

Deine vorher erstellte Graphik wird sicher ungefähr **so** aussehen. - Aus dem Kreis ist eine Ellipse geworden! - Ellipse?



Sicher hast du schon einmal gehört, dass die Bahnen der Planeten um die Sonne keine Kreisbahnen, sondern Ellipsenbahnen sind und dass z.B. unsere Erde keine Kugel, sondern ein Rotationsellipsoid ist (denke Dir die nebenstehende Kurve rotierend um die y-Achse).

Auch hier finden wir wieder pythagoräische Zahlentripel!

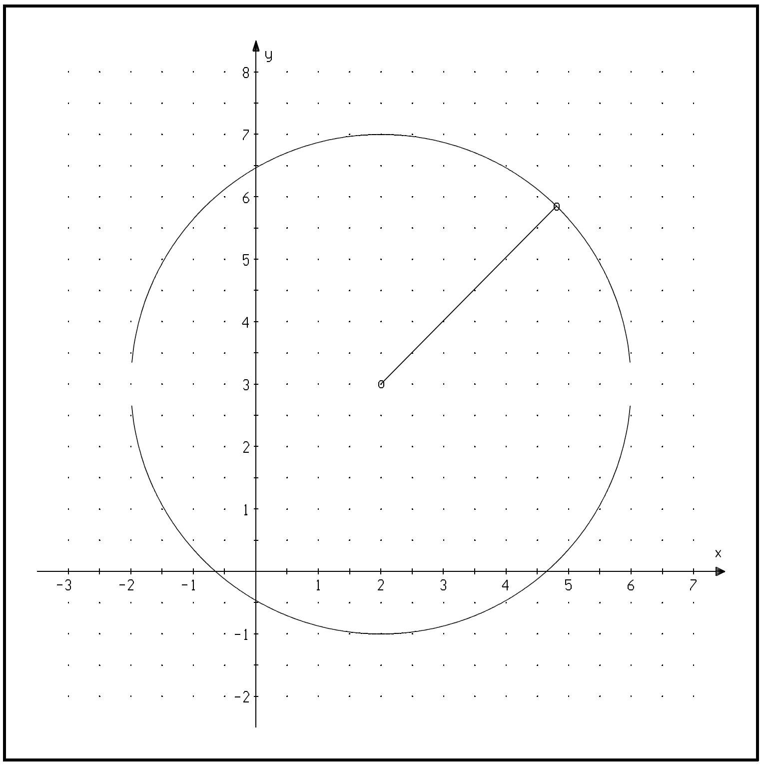
<u>Aufgaben:</u>

8. Verbinde den Punkt (0 | 4) jeweils mit den Punkten (- 3 | 0) und (3 | 0). - Berechne die Summe der Streckenlängen dieser beiden Strecken.

9. Wähle nun einen beliebigen Punkt **E**(x_E | y_E) auf der Ellipse und bestimme wiederum die Längen der Entfernungen von **E** zu den Punkten (- 3 | 0) und (3 | 0). - Bilde die Summe!

10. Informiere dich in geeigneter Literatur über die “Gärtnerkonstruktion einer Ellipse”.

Was wird nun eigentlich aus unserer Kreisgleichung: $x^2 + y^2 = 16$
wenn der Mittelpunkt nicht der Ursprung, sondern der Punkt M(2 | 3) ist?



<u>Aufgaben:</u>

11. Bezeichne in der Graphik den Punkt M mit den zugehörigen Koordinaten und den eingezeichneten Kreispunkt P mit den allgemeinen Koordinaten (x | y). Bestimme die Streckenlänge $\overline{MP}$!

12. Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 - 6 \cdot x + y^2 + 8 \cdot y = 0$$

Was stellt graphisch die Lösungsmenge dieser Gleichung dar?[1]

---

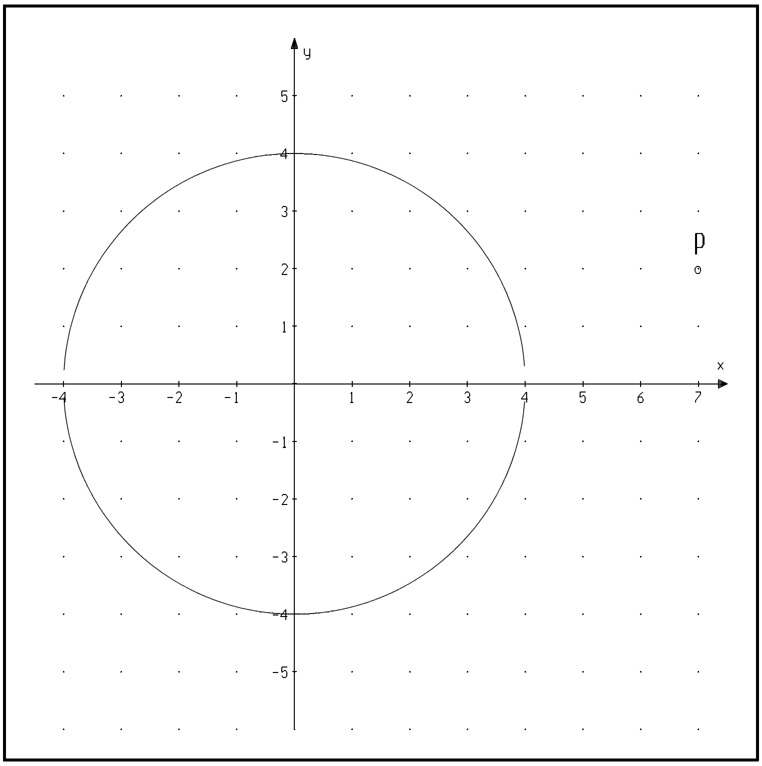
[1] <u>Tipp:</u> Erinnere dich an binomische Formeln bzw. an Umformungen mit quadratischer Ergänzung: “Was der Mathematiker nicht hat, das holt er sich!”

Pythagoräische Zahlentripel
... und was folgt daraus ?

Eine “letzte”, schöne Konstruktion zur ‘Satzgruppe des Pythagoras’.

Bei der geometrischen Abbildung: Kreisspiegelung (Inversion am Kreis) wird einem Punkt **P** ein Bildpunkt **P’** zugeordnet nach folgender Vorschrift:

- M, P, P’ liegen auf einer Halbgeraden (Anfangspunkt M)
- $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$



<u>Aufgaben:</u>

13. Gib die Fixpunkte der Abbildung an und begründe, dass der Bildpunkt des eingezeichneten Punktes P innerhalb des Kreises liegen muss.

14. Verbinde M mit P und bestimme P’ auf konstruktivem Weg.[2]

15. Zeichne eine Parallele zur y-Achse durch den Punkt P (Gleichung: x = 7) ein und gib an, auf welchem Graph wohl alle Bildpunkte dieser Geraden liegen. - Kann der Ursprung Bildpunkt sein?

Nun doch noch einmal zurück zu der rein zahlentheoretischen Interpretation pythagoräischer Zahlentripel, d.h. wir bewegen uns mit der Gleichung:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$$

nur im Bereich der ganzen (natürlichen) Zahlen. Schon die Babylonier haben mit diesen Zahlentripeln, - das ist der Hintergrund des 1. Arbeitsblattes - , um 1600 v. Chr. rechte Winkel konstruiert nach dem später so genannten Kehrsatz des Satzes des Pythagoras und auch bei den Ägyptern war das Knotenseil zur Konstruktion rechter Winkel im Gelände bekanntes Hilfsmittel.

Diophant von Alexandria (~ 250 v. Chr.)[3] hat sich nun u.a. mit der Frage beschäftigt, wie viele pythagoräische Zahlentripel denn existieren und wie man sie findet. - Hier sein Konstruktionsverfahren:

Wähle 2 natürliche Zahlen **n** und **m** mit der Eigenschaft **n** > **m**, dann ergibt: $\mathbf{x := n^2 - m^2}$; $\mathbf{y} := 2\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}$; $\mathbf{z := n^2 + m^2}$ stets ein pythagoräisches Zahlentripel **x**, **y**, **z**.

16. Beweise, dass die Konstruktionsvorschrift von Diophant richtig ist. - Was ergibt sich wohl für n = 2 und m = 1?

---

[2] <u>Hilfe:</u> Fasse die Strecke MP als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks auf. - Wie wird sich wohl r² interpretieren lassen? - Als Kathetenquadrat?

[3] Was sind denn “diophantische Gleichungen”? - Lies in geeigneter Literatur über den Begriff nach!

Pythagoräische Zahlentripel
... und was folgt daraus ?

Nachtrag für Interessierte:[4]

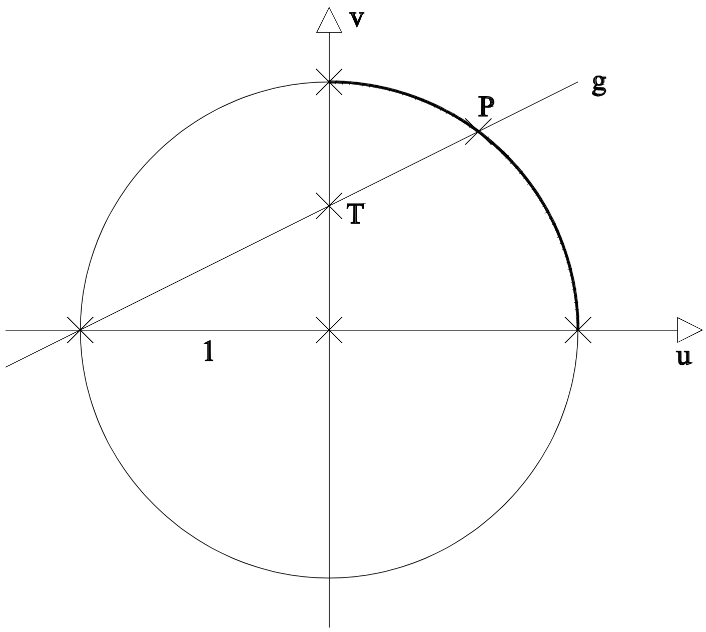
Wie kann man denn nun auf das Konstruktionsprinzip des **Diophant** von Alexandria kommen? - Werden damit alle pythagoräischen Zahlentripel erfasst?

Wir interpretieren unsere Gleichung: $x^2 + y^2 = z^2$ $(x, y, z \in \mathbb{N}^*)$

dazu ein wenig anders: $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1,$

das heißt im geometrischen Sinne, dass sich aus den Zahlen eines pythagoräischen Zahlentripels rationale Punktkoordinaten eines Punktes im 1. Quadranten auf einem Einheitskreis bilden lassen. Umgekehrt: Hat man einen rationalen Punkt $\left(\frac{x}{z} \middle| \frac{y}{z}\right)$ auf dem Einheitskreis im 1. Quadranten gefunden, so ist ein pythagoräisches Zahlentripel bekannt.

Wie findet man nun rationale Punkte auf dem Viertelkreis? - Wir übertragen diese Problematik auf die Strecke zwischen dem Ursprung und dem Punkt (0 | 1) auf der v-Achse.[5]



17. Bezeichne den Punkt **T** mit den Koordinaten (0 | t) und bestätige als Geradengleichung von g: $v = t \cdot u + t$

18. Begründe: Genau dann wenn **T** rationaler Punkt ist, ist auch **P** rationaler Punkt. (Tipp: Strahlensatz)

19. Begründe die folgenden Rechenschritte zur Bestimmung der Punktkoordinaten von **P** in Abhängigkeit von t (Schnittpunktsbedingung von Gerade und Kreis):

$$u^2 + t^2 \cdot (u+1)^2 = 1$$

$$(t^2+1) \cdot u^2 + 2 \cdot t^2 \cdot u + (t^2-1) = 0$$

$$u^2 + \frac{2 \cdot t^2}{t^2+1} \cdot u + \frac{t^2-1}{t^2+1} = 0$$

$$(u+1) \cdot (u - u_2) = 0$$

(Beachte: $u_1 = -1$ erfüllt die Schnittpunktsbedingung und es gilt der Satz von Viëta)

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \,\middle|\, \frac{2 \cdot t}{1+t^2} \right)}$$

---

4 Nach einer Vorlesung von Prof. Dr. Jürg Kramer am 14.07.2003

5 Ich habe als Achsenbezeichnung hier **u** und **v** gewählt, damit keine Verwechslung mit den Zahlen **x** und **y** des pythagoräischen Zahlentripels auftreten kann.

Pythagoräische Zahlentripel
... und was folgt daraus ?

Sei nun t rationale Zahl mit: $t = \dfrac{m}{n}$, $m < n$ und $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2} \;\middle|\; \frac{2 \cdot m \cdot n}{n^2 + m^2} \right)}$$

und damit ist: $\mathbf{x = n^2 - m^2,\ y = 2 \cdot m \cdot n,\ z = n^2 + m^2}$
pythagoräisches Zahlentripel

20. Begründe, dass **primitive** (d.h. x, y, und z sind paarweise teilerfremd) pythagoräische Zahlentripel entstehen, wenn zusätzlich gilt:

    – m und n haben verschiedene Parität, d.h. eine Zahl ist ungerade, die andere gerade,
    – m und n sind teilerfremd.