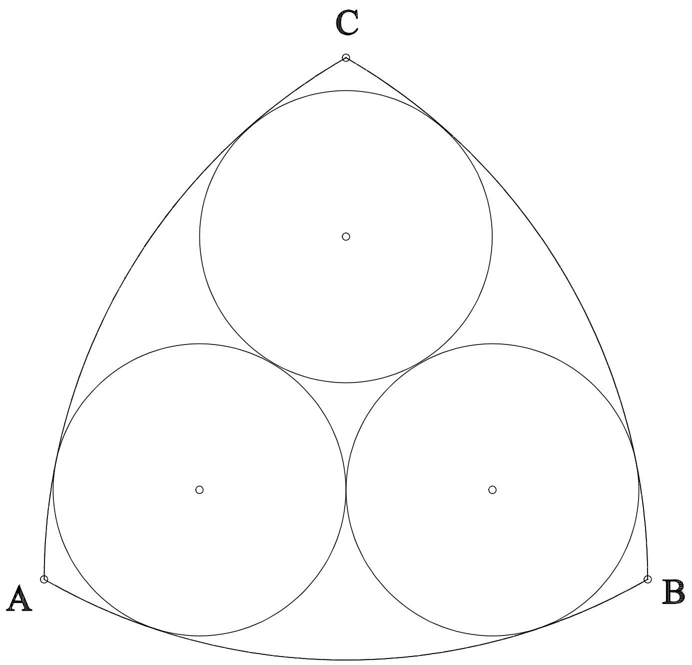
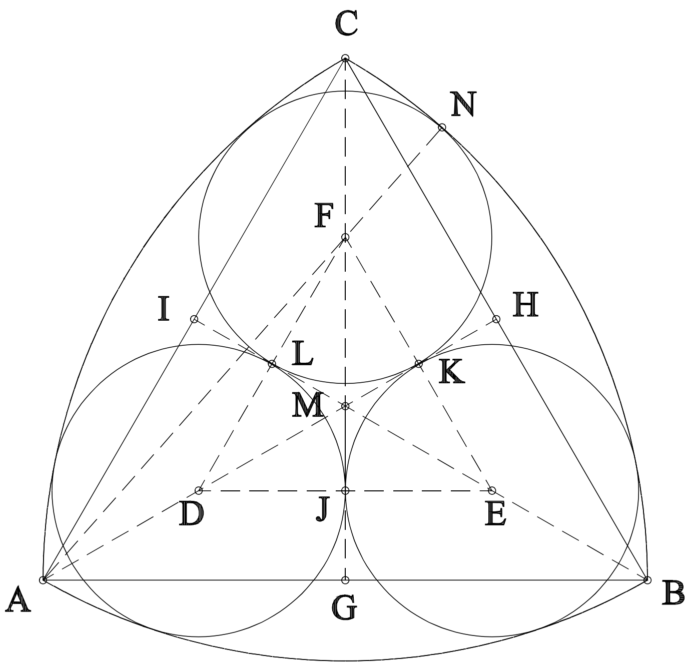
Reuleauxsches Dreieck und Kreis

oder: Ein Berührkreis kommt selten allein !



Gegeben ist ein Reuleauxsches[1] Dreieck mit bekanntem Radius **R** der Kreisbögen. In dieses Dreieck sollen 3 gleich große Kreise einbeschrieben werden, die sich gegenseitig und das Reuleauxsche Dreieck innen berühren.

*Wie groß ist der Radius **r** der einbeschriebenen Kreise und wo liegen die zugehörigen Mittelpunkte?*



Ohne Hilfslinien und Punktbezeichnungen sieht man gar nichts! - Erläutere die Eigenschaften der eingezeichneten Linien und Punkte!

[1] <u>Hinweis:</u> Ein Reuleauxsches Dreieck ist ein **Gleichdick**. - Ein Gleichdick (auch: Roller) ist eine geschlossene Linie, die in jeder Lage innerhalb eines geeigneten Quadrates stets alle vier Seiten berührt, so wie ein Kreis. - Informiere dich durch Literaturrecherche (Lexikon, Internet etc.) über den Techniker (Forscher, Lehrer, Ingenieur ...): **Franz Reuleaux** (✳1829 - ✝1905).

Reuleauxsches Dreieck und Kreis

oder: Ein Berührkreis kommt selten allein !

<u>Es gilt:</u>

(1) Die Dreiecke **ΔABC** und **ΔDEF** sind gleichseitig
und **M** ist Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in diesen Dreiecken.

$$\Rightarrow \qquad \overline{\mathbf{MJ}} = \frac{1}{3}\cdot\mathbf{r}\cdot\sqrt{3} \quad \wedge \quad \overline{\mathbf{MG}} = \frac{1}{6}\cdot\mathbf{R}\cdot\sqrt{3}$$

(2) Das Dreieck **ΔAGF** ist rechtwinklig
und damit gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\left(\overline{\mathbf{AF}}\right)^2 = \left(\overline{\mathbf{AG}}\right)^2 + \left(\overline{\mathbf{GF}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad (\mathrm{R}-\mathrm{r})^2 = \left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{R}}{6}\cdot\sqrt{3} + \frac{2}{3}\cdot\mathrm{r}\cdot\sqrt{3}\right)^2$$

Zeige, dass sich als Lösung dieser Gleichung ergibt:

$$\boxed{\mathbf{r} = \left(3\cdot\sqrt{2} - 4\right)\cdot\mathbf{R}}$$

Wähle für eine Konstruktion als Radius **R** = 10 cm und zeichne das Reuleauxsche Dreieck mit den zugehörigen inneren Berührkreisen. Verwende möglichst wenige Hilfslinien.

<u>Hausaufgabe:</u>

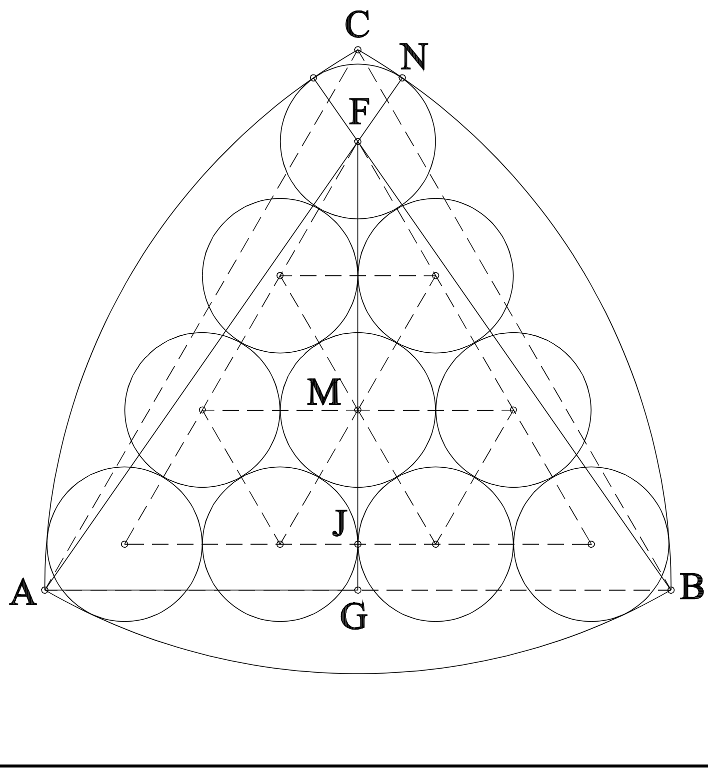
Gegeben sind 10 Kreise mit Radius **r**, die in Form eines Berührdreieckes angeordnet sind (siehe Skizze).

Bestätige, dass für **R** in Abhängigkeit von **r** gilt:

$$\boxed{\mathbf{R} = \left(3 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{102}\right)\cdot\mathbf{r}}$$

Konstruiere die nebenstehende Figur, bestehend aus 10 Berührkreisen und einem umgebenden Reuleauxschen Dreieck mit möglichst wenigen Hilfslinien.

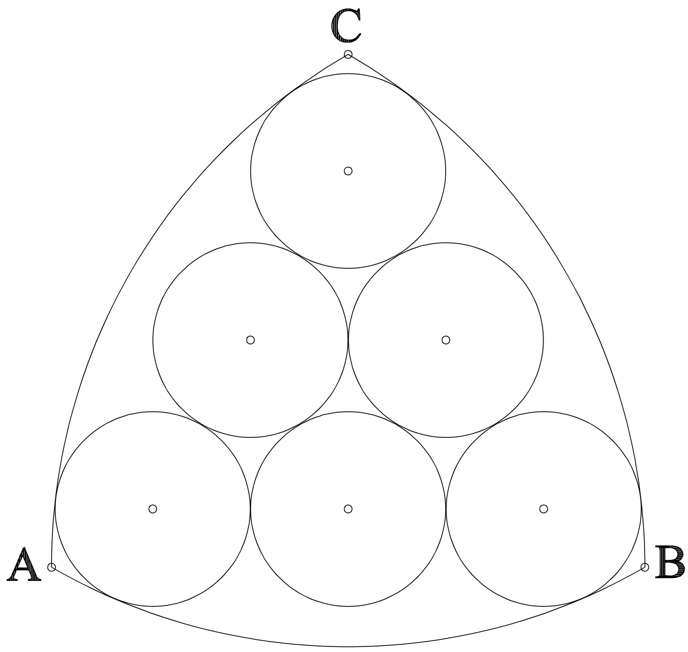
Achte auf eine vernünftige Größe der Gesamtfigur.



Reuleauxsches Dreieck und Kreis

oder: Ein Berührkreis kommt selten allein !

Zusatz (für Interessierte):



Gegeben sind nun 6 Kreise mit Radius **r**, die in Form eines Berührdreieckes angeordnet sind (siehe Skizze).

Bestätige, dass nun für **R** in Abhängigkeit von **r** gilt:

$$\boxed{\mathbf{R} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{51}\right)\cdot\mathbf{r}}$$

Ergänze die Figur zunächst durch geeignete Hilfslinien und Bezeichnungen.

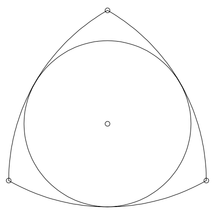
Das Problem soll nun verallgemeinert werden:

Für **3** innere Berührkreise haben wir erhalten:[2] $\mathbf{R} = \left(2 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{18}\right)\cdot\mathbf{r}$

Für **6** innere Berührkreise haben wir erhalten: $\mathbf{R} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{51}\right)\cdot\mathbf{r}$

Für **10** innere Berührkreise haben wir erhalten: $\mathbf{R} = \left(3 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{102}\right)\cdot\mathbf{r}$

Welche Beziehung zwischen **R** und **r** ergibt sich eigentlich für **1** inneren Berührkreis? - Das hatten wir doch schon einmal.



Die Zahlen: **1**, **3**, **6**, **10**, **15**, **21**, ... sind bekanntlich Ergebnisse einer Summe von natürlichen Zahlen und es gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}\cdot(n+1)$. Damit lassen sich genau $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$ kleine Kreise mit Radius **r** in Form eines Dreiecks anordnen.

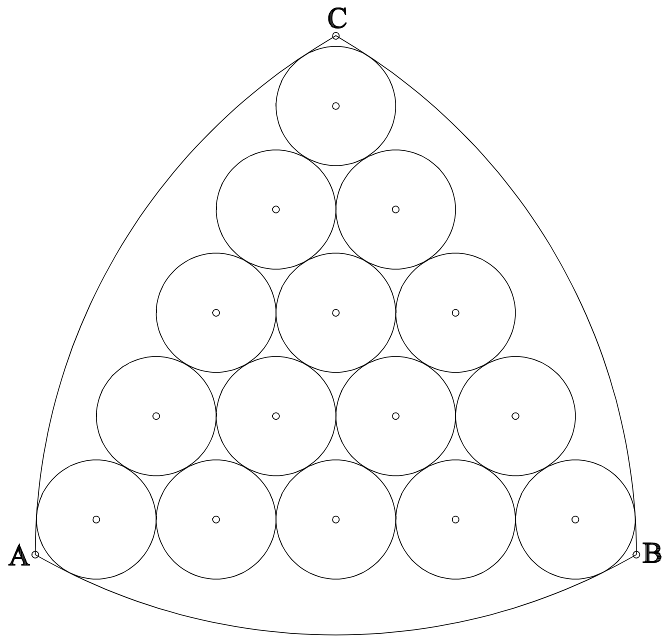
Versuche allgemein eine Beziehung zwischen **r** und **R** zu finden, wenn $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$ kleine Kreise mit Radius **r** in Form eines Dreiecks angeordnet sind und **R** der Radius des umbeschriebenen Reuleauxschen Dreiecks ist.

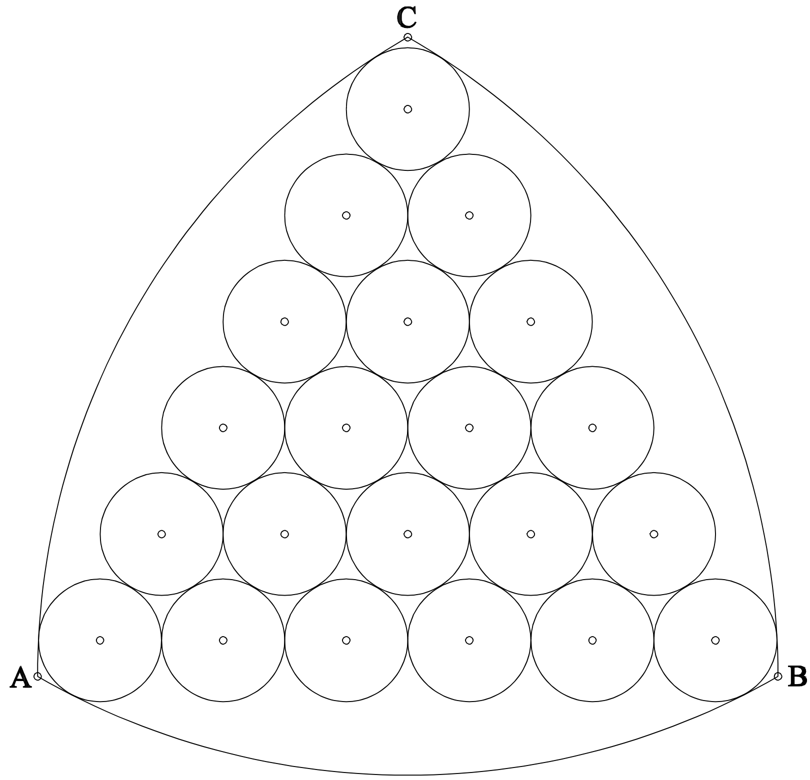
---

[2] Bestätige dies durch Umformung der ersten Beziehung zwischen **r** und **R**.

Lösung der Verallgemeinerung:[3]

$$\mathbf{R} = \left[\left(1 + \frac{n}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9 \cdot n^2 - 12 \cdot n + 6} \right] \cdot \mathbf{r}$$





[3] Ansatz: $(R - r)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{6} \cdot \sqrt{3} + \frac{2}{3} \cdot (n-1) \cdot r \cdot \sqrt{3}\right)^2$