Alte Sätze neu entdeckt (2)
Folgerungen aus dem Satz von Ceva (Satz des Menelaos)

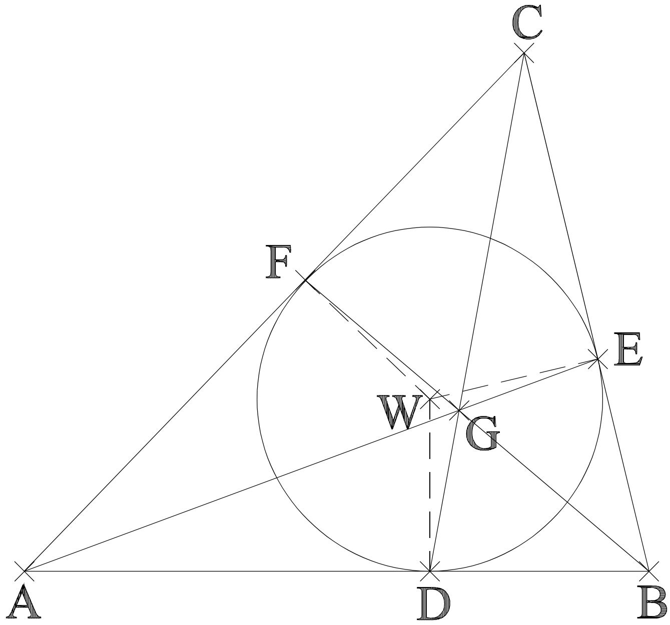
1) Begründe, möglicherweise durch einen Widerspruchsbeweis, dass auch der Kehrsatz des Satzes von Ceva wahr ist, d.h. in Kurzform (mit den vorherigen Bezeichnungen):

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1 \quad \Rightarrow \quad AE,\ BF,\ CD \ \text{ verlaufen durch einen Punkt P}$$

Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck ΔABC (Sonderfälle bitte vermeiden) und konstruiere die drei Berührpunkte D, E und F des Innenkreises mit den Dreiecksseiten.

2) Beweise:

Die Strecken AE, BF und CD verlaufen durch einen Punkt. Dieser Punkt wird üblicherweise mit G (Gergonne- Punkt[1]) bezeichnet.

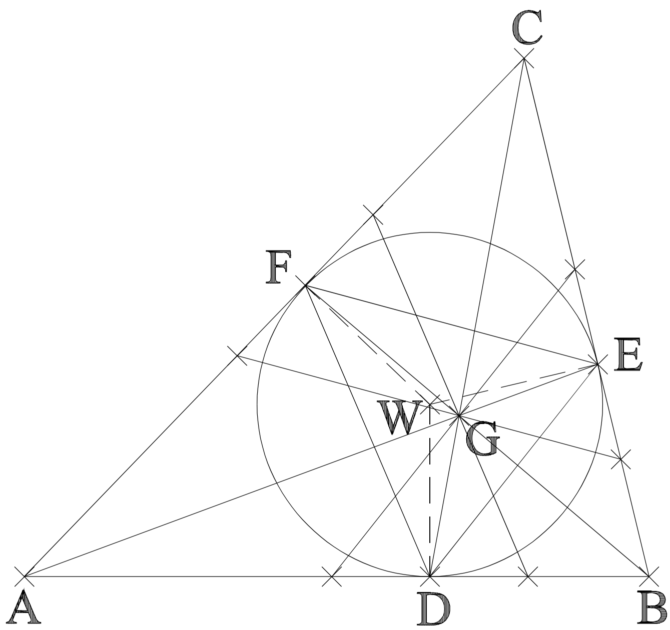


Eine weitere hübsche Folgerung (ohne Beweis) als konstruktive Hausaufgabe:

3) Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck ΔABC (Sonderfälle bitte vermeiden) und konstruiere den Gergonne-Punkt G.

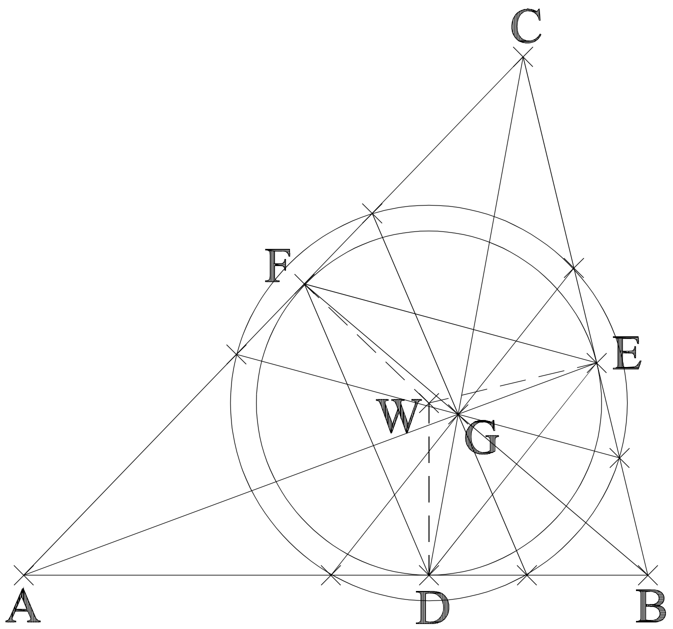
Die Berührpunkte des Innenkreises mit den Dreiecksseiten bilden ein Dreieck ΔDEF. Konstruiere nun Parallelen zu dessen Dreiecksseiten durch den Punkt G. Diese Parallelen schneiden die Dreiecksseiten des Ausgangsdreiecks in jeweils zwei Punkten.

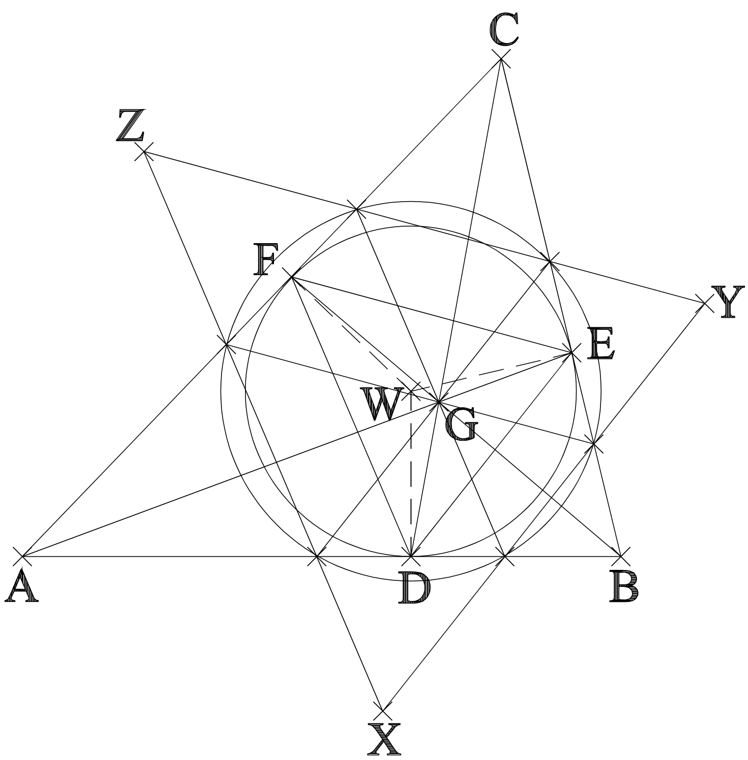
Versuche herauszufinden, was das Besondere dieser sechs neuen Punkte ist. Überprüfe deine möglichen Vermutungen konstruktiv.



[1] Joseph Diaz **Gergonne**, ✳ 19. Juni 1771 in Nancy (Frankreich), † 04. Mai 1859 in Montpellier (Frankreich)

Der **Adams** - Kreis:[2]





Übrigens ist W der Mittelpunkt des Adams - Kreises, während das Dreieck ΔXYZ, dessen Seiten durch je zwei Punkte des Adams - Kreises festgelegt werden, als zentrisch (bezüglich G) gestrecktes Bild des Dreiecks ΔDEF aufgefasst werden kann.

---

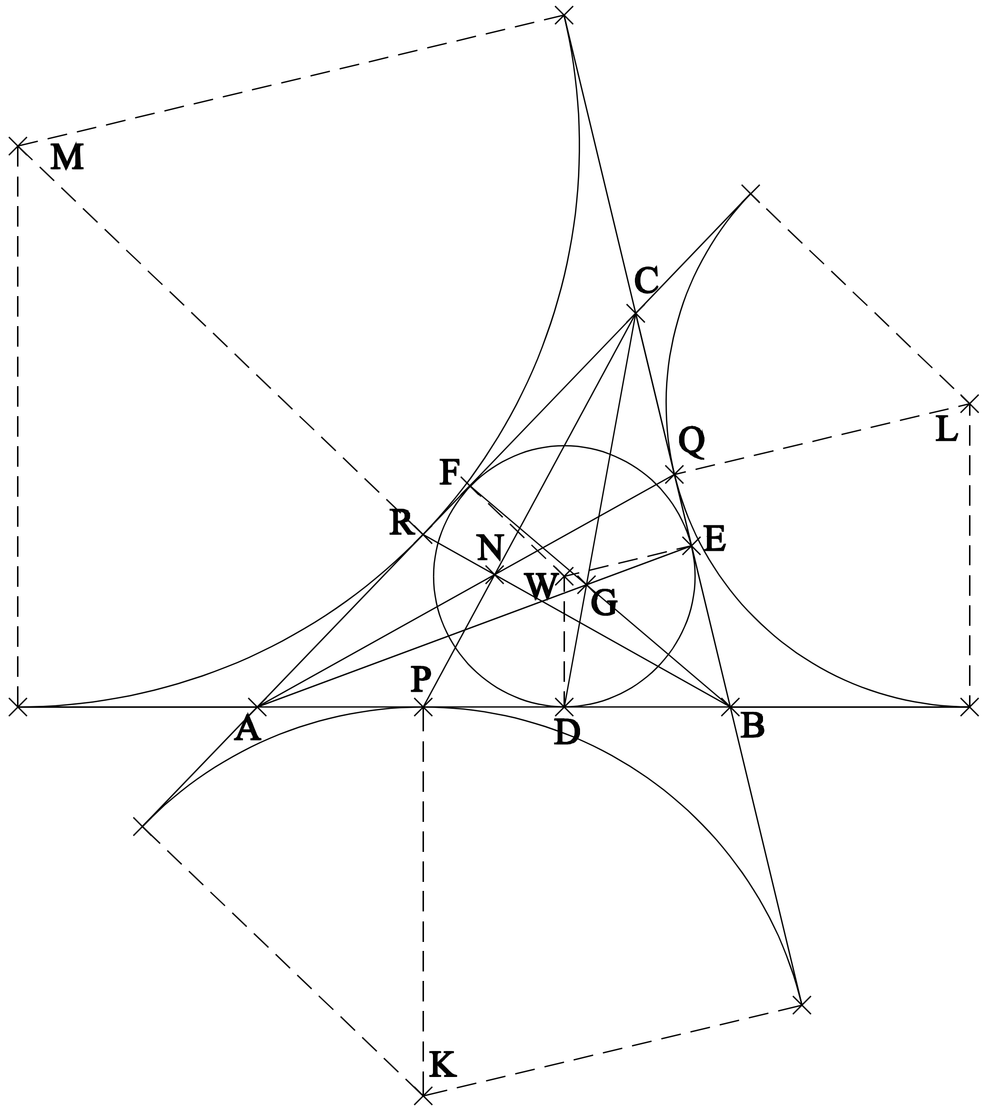
[2] Quelle: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/AdamsCircle.shtml (Alexander Bogomolny)

Alte Sätze neu entdeckt (2)
Folgerungen aus dem Satz von Ceva (Satz des Menelaos)

Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck ΔABC (Sonderfälle bitte vermeiden) und konstruiere die drei Berührpunkte P, Q und R der drei Ankreise mit den Dreiecksseiten.

4) <u>Beweise:</u>

Die Strecken AQ, BR und CP verlaufen durch einen Punkt. Dieser Punkt wird üblicherweise mit N (Nagel-Punkt[3]) bezeichnet.



<u>Tipp:</u> Erinnere dich, dass man bei einer Ankreisfigur auf den Dreiecksseiten auch Abschnitte der Länge (s - a), (s - b) und (s - c) findet, wobei s die halbe Umfangslänge ist. (Klasse 7: Arbeitsblatt „Flächeninhalt und Umfangslänge“)

<u>Anmerkung:</u> Der Nagel-Punkt N, der Schwerpunkt S und der Mittelpunkt des Innenkreises W liegen auf einer Geraden und es gilt: $\overline{NS} : \overline{SW} = 2 : 1$ (ohne Beweis).

---

[3] Christian Heinrich **von Nagel**, ✳ 28. Februar 1803 in Stuttgart; † 27. Oktober 1882

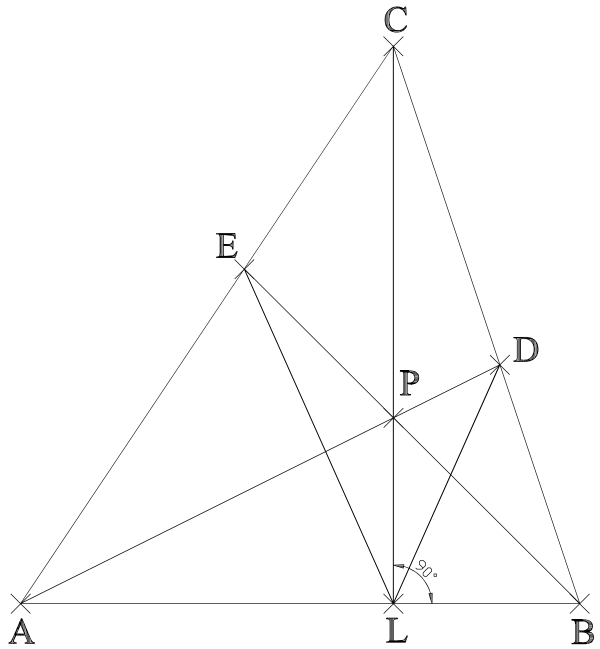
Alte Sätze neu entdeckt (2)

Folgerungen aus dem Satz von Ceva (Satz des Menelaos)

Zeichne in dein Heft ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ΔABC (Sonderfälle bitte vermeiden) und konstruiere die Höhe CL auf die Grundseite AB.

Wähle nun auf CL einen beliebigen Punkt P. Die Gerade g(A;P) schneidet BC im Punkt D, die Gerade g(B;P) schneidet AC im Punkt E.

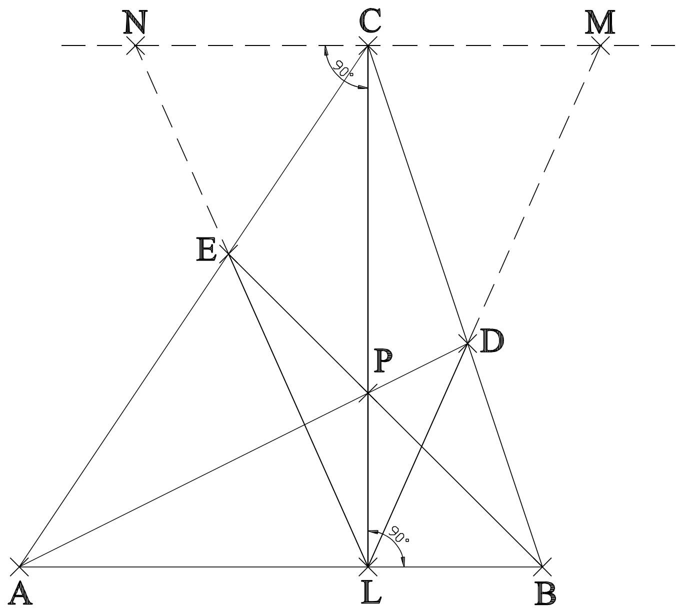
5) Zeichne LD und LE und untersuche die Gesamtfigur auf Besonderheiten. Vergleiche mit den Untersuchungsergebnissen der Nachbarn.



<u>Behauptung:</u>[4] $\overline{\sphericalangle DLC} = \overline{\sphericalangle CLE}$

Zeichne eine Parallele zu AB durch den Punkt C. Die Gerade g(L;D) schneidet diese Parallele im Punkt M, die Gerade g(L;E) schneidet diese Parallele im Punkt N.

Die Beweisidee besteht in dem Ziel zu zeigen, dass C Mittelpunkt eines gleichschenkligen - Dreiecks ΔMNL mit der Höhe LC ist.



---

6) Begründe die folgenden Beweisschritte und ergänze gegebenenfalls fehlende Zwischenschritte.

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{LB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \wedge \frac{\overline{NC}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$$

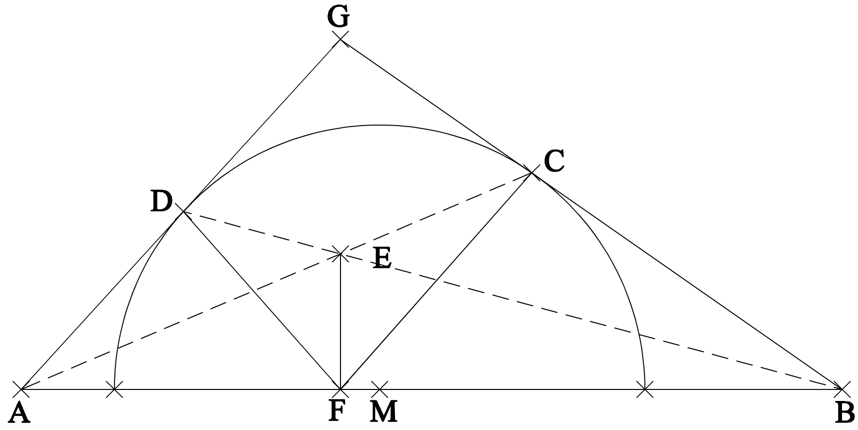
$$\frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{AL} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{DB}}{\overline{LB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EA}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Beh.}$$

4 Dies ist in der Literatur bekannt als **Blanchet**'s Theorem.

Alte Sätze neu entdeckt (2)
Folgerungen aus dem Satz von Ceva (Satz des Menelaos)

Aufgaben
für besonders Interessierte:

a) Wähle auf einem Halbkreis zwei Punkte C und D. Die Tangenten in diesen beiden Punkten schneiden die Trägergerade des Durchmessers in A und B und schneiden sich untereinander im Punkt G. E sei der Schnittpunkt von AC und BD.
F ist der Fußpunkt des Lotes von E auf AB.



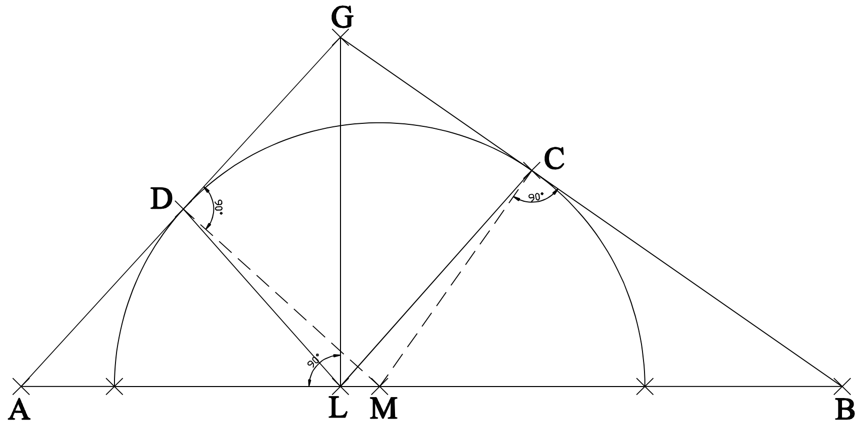
Beweise:[5] $\overline{\sphericalangle CFE} = \overline{\sphericalangle EFD}$

Beweisidee:

Die Figur erinnert an Blanchet‘s Theorem (Aufgaben 5 und 6), hier im Dreieck ΔABG.

Man müsste zeigen, dass E auf dem Lot von G auf AB liegt, d.h. dass die Fußpunkte F und L identisch sind.

In der Figur entdeckt man viele ähnliche (rechtwinklige) Dreiecke,



z.B. gilt: $\Delta GAL \cong \Delta MDA$; $\Delta BGL \cong \Delta MBC$

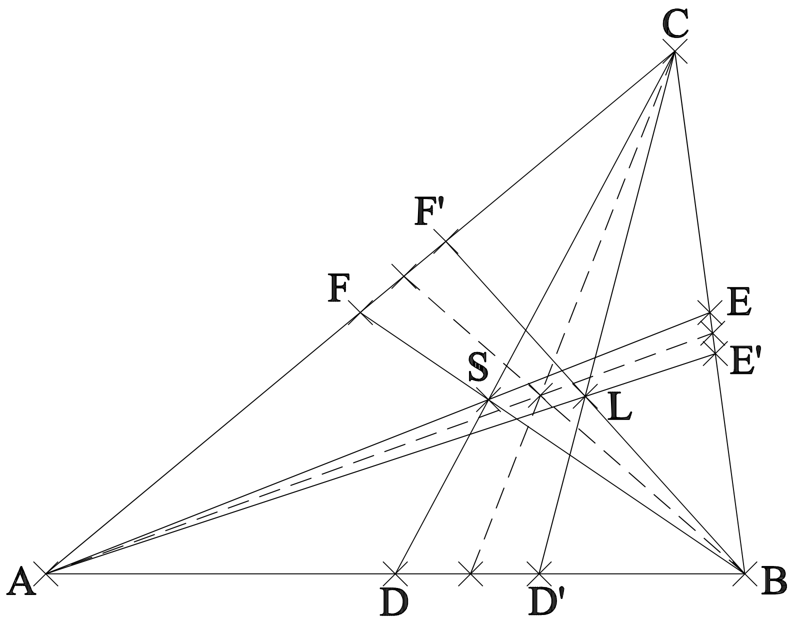
und natürlich $\overline{MC} = \overline{MD}$. - Wenn man aus der Ähnlichkeit von Dreiecken herleiten könnte, dass gilt:

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CG}} \cdot \frac{\overline{GD}}{\overline{DA}} = 1$$

dann verliefen nach dem Kehrsatz des Satzes von Ceva die Strecken AC, BD und LG durch einen Punkt, und das müsste der Schnittpunkt E von AC und BD sein.

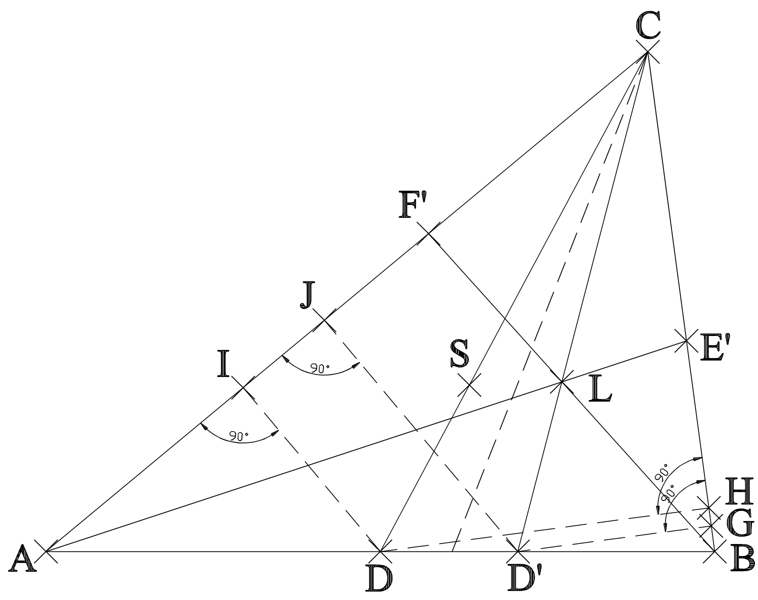
[5] Quelle: IMO Shortlist 1994, Geometry, Problem 1

b) Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck ΔABC (Sonderfälle bitte vermeiden) und konstruiere die drei Seitenhalbierenden und die drei Winkelhalbierenden.
Spiegele nun jede Seitenhalbierende an der zugehörigen Winkelhalbierenden mit dem gemeinsamen Dreieckspunkt und überprüfe, ob die drei **Symmedianen**, wie diese Spiegelstrecken genannt werden, wieder durch einen Punkt verlaufen.
Wenn dem so ist, so benenne diesen Schnittpunkt der Symmedianen mit **L** (Lemoine-Punkt).[6]



Die Beweisidee beruht natürlich auf einer Anwendung des Kehrsatzes des Satzes von Ceva.[7]

Zum Beweis betrachten wir zunächst nur die Seitenhalbierende s_c und fällen von den Punkten D und D' Lote auf die Dreiecksseiten AC und BC.
Man erkennt nun Strahlensatzfiguren, ähnliche Dreiecke und gleich große Dreiecke.



Analysiere die folgenden Beweisschritte:

Aus der Ähnlichkeit von Dreiecken ergibt sich:

$$\frac{\overline{D'G}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{DC}} \quad \wedge \quad \frac{\overline{D'J}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DC}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\overline{D'G}}{\overline{D'J}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{DH}}}$$

---

6 Émile Michel Hyacinthe **Lemoine** (✳ 22. November 1840 in Quimper; † 21.Februar 1912 in Paris)

7 Quelle: H.-O. Peitgen: „Wie ich die Geometrie wieder lieben lernte"; Nürnberger Kolloquium zur Didaktik der Mathematik 2005

Wegen der Gleichheit der Flächeninhalte der Dreiecke ΔADC und ΔDBC ergibt sich:

$b \cdot \overline{DI} = a \cdot \overline{DH} \Rightarrow \frac{\overline{DI}}{\overline{DH}} = \frac{a}{b}$. Womit gilt: $\boxed{\frac{\overline{D'G}}{\overline{D'J}} = \frac{a}{b} \wedge \frac{\overline{DI}}{\overline{DH}} = \frac{a}{b}}$

Aus Strahlensatzfiguren erhält man: $\frac{\overline{DH}}{\overline{D'G}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{D'B}} \wedge \frac{\overline{DI}}{\overline{D'J}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A}}$, woraus sich nun das gewünschte Streckenlängenverhältnis $\overline{AD'} : \overline{D'B}$ bilden läßt.

Weil D der Mittelpunkt von AB ist ergibt sich insgesamt:

$$\frac{\overline{AD'}}{\overline{D'B}} = \frac{\overline{DA} \cdot \overline{D'J} \cdot \overline{DH}}{\overline{DB} \cdot \overline{D'G} \cdot \overline{DI}} = \frac{\overline{D'J}}{\overline{D'G}} \cdot \frac{\overline{DH}}{\overline{DI}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Ergebnis: Die Symmediane durch den Punkt C teilt die gegenüberliegende Dreiecksseite AB im Verhältnis der <u>Quadrate</u> der anliegenden Dreiecksseiten. (Überprüfung am Beispieldreieck?)
Eventuell von früher wissen wir, dass die Dreiecksseite AB im Verhältnis der anliegenden Dreiecks-seiten durch die Winkelhalbierende w_γ geteilt wird.[8]

Ein entsprechender Beweisgang für die anderen beiden Seitenhalbierenden s_a und s_b führt zu den folgenden Verhältnisgleichungen:

$$\frac{\overline{BE'}}{\overline{E'C}} = \frac{a^2}{c^2} \wedge \frac{\overline{CF'}}{\overline{F'A}} = \frac{c^2}{b^2}$$

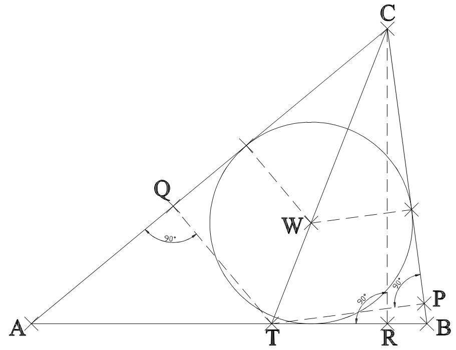
Und damit am Ende:

$$\boxed{\frac{\overline{AD'} \cdot \overline{BE'} \cdot \overline{CF'}}{\overline{D'B} \cdot \overline{E'C} \cdot \overline{F'A}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{b^2} = 1}$$

“Schnelle” Herleitung des Teilungsverhältnisses von AB durch w_γ :

$$\overline{AT} \cdot \overline{CR} = b \cdot \overline{QT} \wedge \overline{TB} \cdot \overline{CR} = a \cdot \overline{TP} \wedge \overline{QT} = \overline{TP} \Rightarrow$$

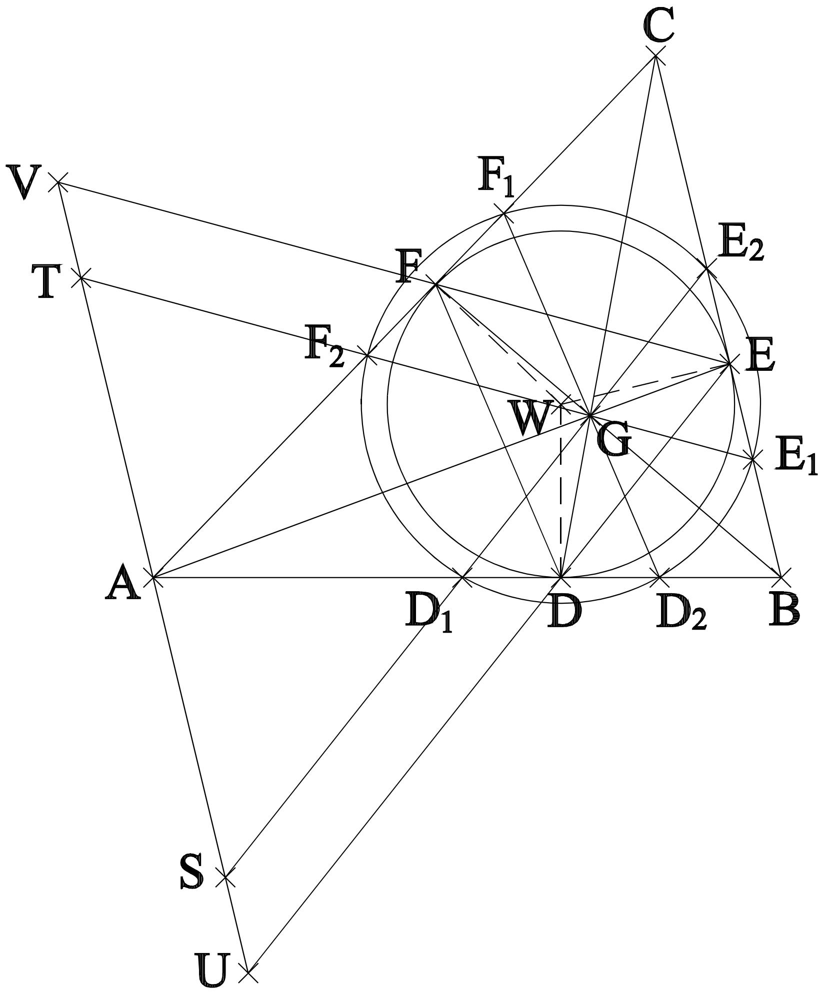
$$\boxed{\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{b}{a}}$$



---

8 Arbeitsblatt „Harmonische Teilung”

Alte Sätze neu entdeckt (2)
Folgerungen aus dem Satz von Ceva (Satz des Menelaos)



<u>Nachtrag:</u>
(Beweis zum Adams - Kreis)

– ΔADF ist gleichschenklig
 $\Rightarrow \quad \overline{AD} = \overline{AF}$

– ΔAD_2F_1 ist gleichschenklig, weil $D_2F_1 \parallel DF$

 $\Rightarrow \quad \overline{AD_2} = \overline{AF_1}$

Damit gilt: $\quad \overline{DD_2} = \overline{FF_1}$

Ebenso: $\quad \overline{EE_2} = \overline{DD_1}$

$\wedge \quad \overline{FF_2} = \overline{EE_1}$

UV sei eine zu BC parallele Strecke durch A. Dann gilt:

– $\Delta DAU \cong \Delta DBE \Rightarrow \Delta DAU$ ist gleichschenklig
 $\Rightarrow \quad \overline{AD} = \overline{AU}$

 Ebenso: $\quad \overline{AV} = \overline{AF}$

 $\Rightarrow$ A ist Mittelpunkt von UV

– $\Rightarrow \quad \overline{VT} = \overline{US}$

– $\Rightarrow \quad \overline{SU} = \overline{EE_1}$ weil $\square VTE_1E$ ein Parallelogramm ist. - Damit schließt man insgesamt, dass gilt:

$$\boxed{\overline{DD_1} = \overline{DD_2} = \overline{EE_1} = \overline{EE_2} = \overline{FF_1} = \overline{FF_2}}$$

Nun ist wegen der Innenkreiseigenschaft: ($WD \perp D_1D_2$) $\wedge$ ($WE \perp E_1E_2$) $\wedge$ ($WF \perp F_1F_2$), womit nach dem obigen Ergebnis die sechs Punkte D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 auf einem Kreis um den Mittelpunkt W liegen müssen.