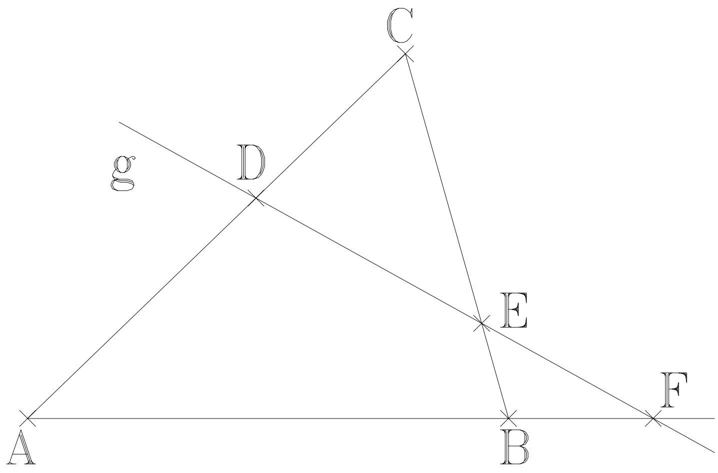
Alte Sätze neu entdeckt
Was man mit Strahlensätzen auch tun kann

Menelaos, ein griechischer Mathematiker der in Alexandria gelebt hat, hat sich u.a. mit der folgenden Frage beschäftigt:

Wird ein Dreieck von einer Geraden **g** geschnitten, wobei **g** nicht durch einen Eckpunkt verlaufen soll, so werden zwei Dreiecksseiten (hier: **a** und **b**) durch Schnittpunkte (hier: **D** und **E**) geteilt, und **g** verläuft außerdem durch die Verlängerung der 3. Dreiecksseite (hier: Schnittpunkt **F**).



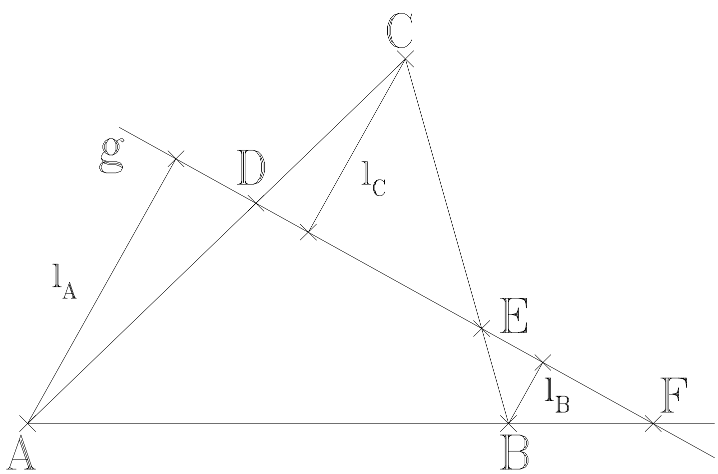
Gibt es eigentlich eine stets gültige Beziehung zwischen den jeweiligen (Teilungs-) Abschnitten auf den Dreiecksseiten, unabhängig davon, wo genau die Gerade **g** das Dreieck schneidet?

1) Fertige eine entsprechende Skizze eines Dreiecks (möglichst groß - evtl. Heftblatt quer) mit einer schneidenden Geraden im Heft an, miß die ungefähren Längen der Abschnitte. Bilde (Taschenrechner) Seitenlängenverhältnisse der Abschnitte auf den Dreiecksseiten. - Vergleiche mit den Verhältnissen des Nachbarn (der sicher ein anderes Dreieck gezeichnet hat). - Schon etwas entdeckt?

2) (Hausaufgabe) Versuche in geeigneter Literatur, oder Recherche im Internet etc., Informationen über Menelaos zu erhalten.

Verhältnisse von Seitenlängen und Schnittpunkte “schreien” eigentlich nach einer Strahlensatzfigur! - Aber wo sind die Parallelen? - Nun, die Grunddefinition von Parallelität war ja, dass es eine gemeinsame Senkrechte gibt. Also: (Was der Mathematiker nicht hat, das holt er sich) Von den Eckpunkten des Dreiecks die Lote auf **g** fällen.

Nun erkennt man 3 Strahlensatzfiguren!



3) Bilde nach dem 2. Strahlensatz die Verhältnisse:

$$\frac{\mathbf{l_A}}{\mathbf{l_C}}\ ,\quad \frac{\mathbf{l_C}}{\mathbf{l_B}}\ ,\quad \frac{\mathbf{l_B}}{\mathbf{l_A}}$$

gib das jeweilige Zentrum der Strahlensatzfigur sowie das zugehörige Streckenlängenverhältnis auf den Dreiecksseiten (bzw der Verlängerung) an.

4) Es gilt sicher: $\frac{\mathbf{l_A}}{\mathbf{l_C}} \cdot \frac{\mathbf{l_C}}{\mathbf{l_B}} \cdot \frac{\mathbf{l_B}}{\mathbf{l_A}} = 1\,.$ - **Menelaos** hat formuliert: $\frac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{a_2}} \cdot \frac{\mathbf{b_1}}{\mathbf{b_2}} \cdot \frac{\mathbf{c_1}}{\mathbf{c_2}} = 1\,.$

Bezeichne in deiner Heftskizze, welche Abschnitte auf den Dreiecksseiten mit $\mathbf{a_1, ..., c_2}$ gemeint sind. Prüfe mit den vorherigen Messungen (1) nach!

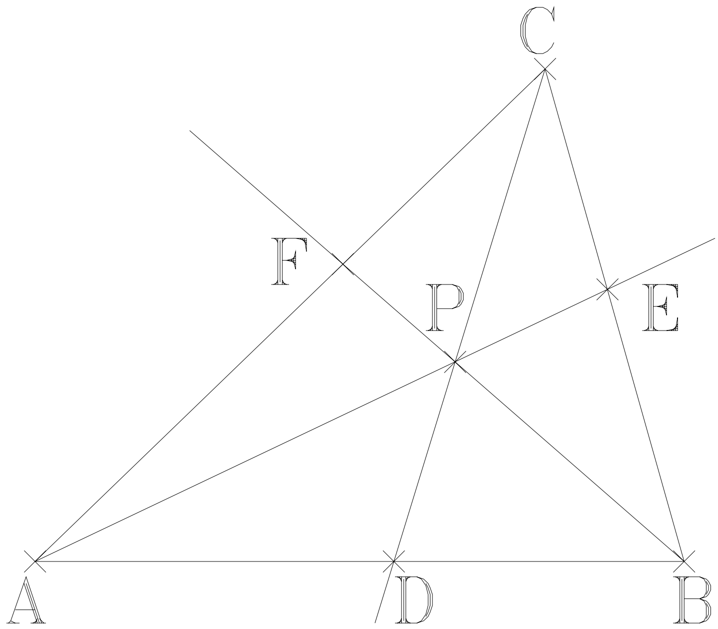
Alte Sätze neu entdeckt
Was man mit Strahlensätzen auch tun kann

Dieser alte Satz ist natürlich nicht erst heute “wiederentdeckt” worden, sondern insbesondere im Zeitalter der Renaissance (“Wiedergeburt”) hat man sich intensiv mit der Kultur der Griechen beschäftigt. - So hat sich auch der italienische Mathematiker **Giovanni Ceva** mit griechischer Mathematik beschäftigt.

Giovanni Ceva formulierte u.a. einen Satz, der als eine Erweiterung des vorherigen Satzes aufgefasst werden kann:

Wählt man im Inneren eines Dreiecks einen beliebigen Punkt **P** und zeichnet Geraden durch **P** und die jeweiligen Eckpunkte, so werden die drei Dreiecksseiten durch die Geraden in jeweils 2 Abschnitte geteilt (hier: Schnittpunkte **D**, **E** und **F**). - Das Produkt der Verhältnisse der .....

Der Satz ist verloren gegangen!?



5) Fertige eine entsprechende Skizze eines Dreiecks (möglichst groß - evtl. Heftblatt quer) an, wähle einen beliebigen Punkt **P** im Inneren des Dreiecks und konstruiere, wie angegeben, die Punkte **D**, **E** und **F**. Miss die ungefähren Längen der Abschnitte. Bilde (Taschenrechner) Seitenlängenverhältnisse der Abschnitte auf den Dreiecksseiten. - Vergleiche mit den Verhältnissen des Nachbarn (der sicher ein anderes Dreieck mit einem anderen inneren Punkt **P** gezeichnet hat). - Schon etwas entdeckt?

6) (Hausaufgabe) Versuche in geeigneter Literatur, oder Recherche im Internet etc., Informationen über Giovanni Ceva zu erhalten.

7) Betrachte nur das Teildreieck **ΔADC** und fasse die Gerade **g(F,B)** als schneidende Gerade gemäß des Satzes des Menelaos auf. - Wie kann man nach diesem Satz das Seitenlängenverhältnis: $\frac{\overline{CP}}{\overline{PD}}$ ausdrücken?[1]

8) Betrachte nur das Teildreieck **ΔDBC** und fasse die Gerade **g(A,E)** als schneidende Gerade gemäß des Satzes des Menelaos auf. - Wie kann man nach diesem Satz das Seitenlängenverhältnis: $\frac{\overline{CP}}{\overline{PD}}$ ausdrücken?

9) Setze die in (7) und (8) erhaltenen Terme für $\frac{\overline{CP}}{\overline{PD}}$ gleich und formuliere deine Version des Satzes von **Ceva**. - Kontrolliere mit den vorherigen Messwerten (5).[2]

---

1 Bei Problemen zeichne dir, auch beim nächsten Aufgabenteil, als Hilfe die Lote von den Eckpunkten auf die Gerade ein!

2 Quelle: LS Geometrie 2, Klett Verlag, 1.Auflage 1985