Zu den Summenformeln

1) Summenformel für die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n (Gaußsche Summenformel):

Sei: $S_1(n) = 1+2+3+4+ \ldots +n = \sum_{i=1}^{n} i$

Es gilt:

$$(0+1)^2 = 0^2 + 2\cdot 0\cdot 1 + 1^2$$
$$(1+1)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1^2$$
$$(2+1)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 1 + 1^2$$
$$(3+1)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 1 + 1^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^2 = n^2 + 2\cdot n\cdot 1 + 1^2$$

$1^2+2^2+3^2+ \ldots +$

$$(n+1)^2 = 1^2+2^2+3^2+ \ldots +n^2 + 2\cdot S_1(n) + (n+1)$$
$$(n+1)^2 = 2\cdot S_1(n) + (n+1)$$
$$2\cdot S_1(n) = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)\cdot(n+1-1)$$
$$\Rightarrow \quad S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

---

2) Summenformel für die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis n:

Sei: $S_2(n) = 1^2+2^2+3^2+4^2+ \ldots +n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$

Es gilt:

$$(0+1)^3 = 0^3 + 3\cdot 0^2\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 1^2 + 1^3$$
$$(1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1^2 + 1^3$$
$$(2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1^2 + 1^3$$
$$(3+1)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 1^2 + 1^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2\cdot 1 + 3\cdot n\cdot 1^2 + 1^3$$

$1^3+2^3+3^3+ \ldots +$

$$(n+1)^3 = 1^3+2^3+3^3+ \ldots +n^3 + 3\cdot S_2(n) + 3\cdot S_1(n) + (n+1)$$
$$(n+1)^3 = 3\cdot S_2(n) + 3\cdot S_1(n) + (n+1)$$
$$3\cdot S_2(n) = (n+1)^3 - (n+1) - 3\cdot S_1(n)$$
$$3\cdot S_2(n) = (n+1)^3 - (n+1) - 3\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$
$$3\cdot S_2(n) = (n+1)\cdot\left[(n+1)^2 - 1 - 3\cdot\frac{n}{2}\right]$$
$$3\cdot S_2(n) = (n+1)\cdot\left[n^2 + 2n - \frac{3\cdot n}{2}\right]$$
$$3\cdot S_2(n) = n\cdot(n+1)\cdot\left[n + \frac{1}{2}\right]$$
$$\Rightarrow \quad S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

Zu den Summenformeln

3) Summenformel für die Summe der Kuben der natürlichen Zahlen von 1 bis n:

Sei: $$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

Es gilt:
$$\begin{aligned}
(0+1)^4 &= 0^4 + 4\cdot 0^3\cdot 1 + 6\cdot 0^2\cdot 1^2 + 4\cdot 0\cdot 1^3 + 1^4\\
(1+1)^4 &= 1^4 + 4\cdot 1^3\cdot 1 + 6\cdot 1^2\cdot 1^2 + 4\cdot 1\cdot 1^3 + 1^4\\
(2+1)^4 &= 2^4 + 4\cdot 2^3\cdot 1 + 6\cdot 2^2\cdot 1^2 + 4\cdot 2\cdot 1^3 + 1^4\\
(3+1)^4 &= 3^4 + 4\cdot 3^3\cdot 1 + 6\cdot 3^2\cdot 1^2 + 4\cdot 3\cdot 1^3 + 1^4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^4 &= n^4 + 4\cdot n^3\cdot 1 + 6\cdot n^2\cdot 1^2 + 4\cdot n\cdot 1^3 + 1^4
\end{aligned}$$

$1^4+2^4+ \ldots +$
$$\begin{aligned}
(n+1)^4 &= 1^4+2^4+ \ldots +n^4 + 4\cdot S_3(n) + 6\cdot S_2(n) + 4\cdot S_1(n) + n+1\\
(n+1)^4 &= 4\cdot S_3(n) + 6\cdot S_2(n) + 4\cdot S_1(n) + (n+1)\\
4\cdot S_3(n) &= (n+1)^4 - (n+1) - 4\cdot S_1(n) - 6\cdot S_2(n)\\
4\cdot S_3(n) &= (n+1)^4 - (n+1) - 4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - 6\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\\
4\cdot S_3(n) &= (n+1)\cdot\left[(n+1)^3 - 1 - 2\cdot n - n\cdot(2n+1)\right]\\
4\cdot S_3(n) &= (n+1)\cdot\left[n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1 - 1 - 2\cdot n - 2\cdot n^2 - n\right]\\
4\cdot S_3(n) &= (n+1)\cdot\left[n^3 + n^2\right] = n^2\cdot(n+1)^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

Weitere Summenformeln können unter Fortsetzung des Verfahrens, unter Verwendung von Binomischen Formeln hergeleitet werden.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2\cdot a^1\cdot b + b^2\\
(a+b)^3 &= a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a^1\cdot b^2 + b^3\\
(a+b)^4 &= a^4 + 4\cdot a^3\cdot b + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a^1\cdot b^3 + b^4\\
(a+b)^5 &= a^5 + 5\cdot a^4\cdot b + 10\cdot a^3\cdot b^2 + 10\cdot a^2\cdot b^3 + 5\cdot a^1\cdot b^4 + b^5\\
(a+b)^6 &= a^6 + 6\cdot a^5\cdot b + 15\cdot a^4\cdot b^2 + 20\cdot a^3\cdot b^3 + 15\cdot a^2\cdot b^4 + 6\cdot a\cdot b^5 + b^6\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

PASCAL'sches Dreieck:

```
                1
             1  2  1
           1   3   3   1
         1   4   6   4   1
       1   5   10  10   5   1
     1   6   15  20  15   6   1
   1   7   21  35  35  21   7   1
 1   8   28  56  70  56  28   8   1
.. ..  ..  ..  ..  ..  ..  ..  ..  ..   usw.
```