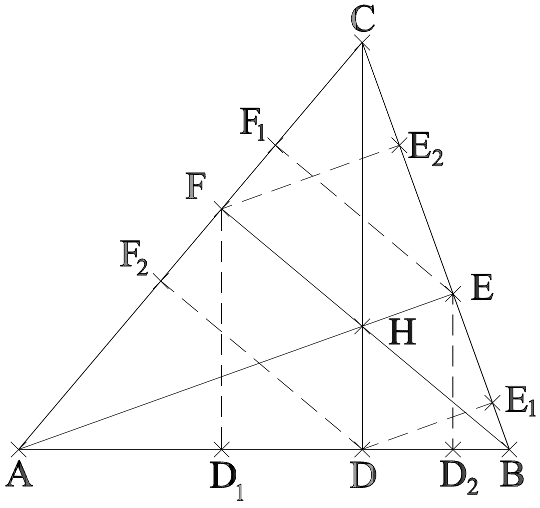
Dreieck und Nebenhöhen

oder: ... Aus 3 mach 9, was folgt daraus.

Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck (aber bitte nicht zu klein und keinen Spezialfall) und konstruiere die 3 Höhen dieses Dreieckes. Bezeichne die Fußpunkte der Lote mit D, E und F.

Fälle nun von den Lotfußpunkten $E \in BC$ und $F \in AC$, erneut Lote auf die Dreiecksseite AB. Benenne diese Lotfußpunkte mit D_1 und D_2. Man nennt die zur Höhe CD parallelen Strecken FD_1 und ED_2 Nebenhöhen der Höhe h_c.

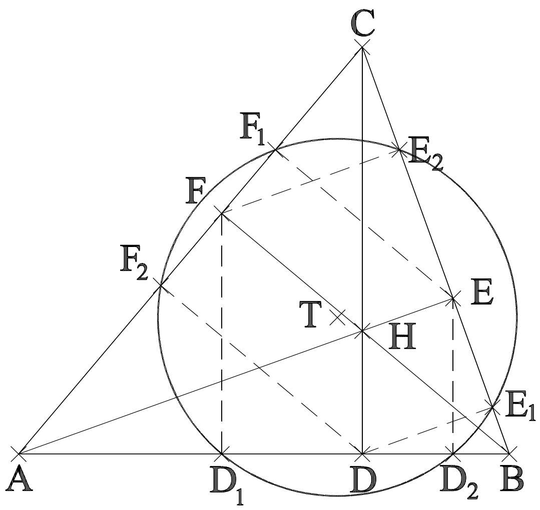
Verfahre mit den anderen beiden Dreiecksseiten entsprechend und konstruiere die Punkte E_1, E_2, F_1, F_2 bzw die Nebenhöhen zu den Höhen h_a und h_b.



1) Untersuche die Figur auf Besonderheiten. - Vergleiche mit Ergebnissen deiner Nachbarn. - Habt ihr gemeinsam schon etwas entdeckt ?

Interessant sind sicher auch die Folgerungen die sich ergeben, wenn man die Figur durch die Geraden $g(F_2,D_1)$, $g(D_2,E_1)$ und $g(E_2,F_1)$ ergänzt.

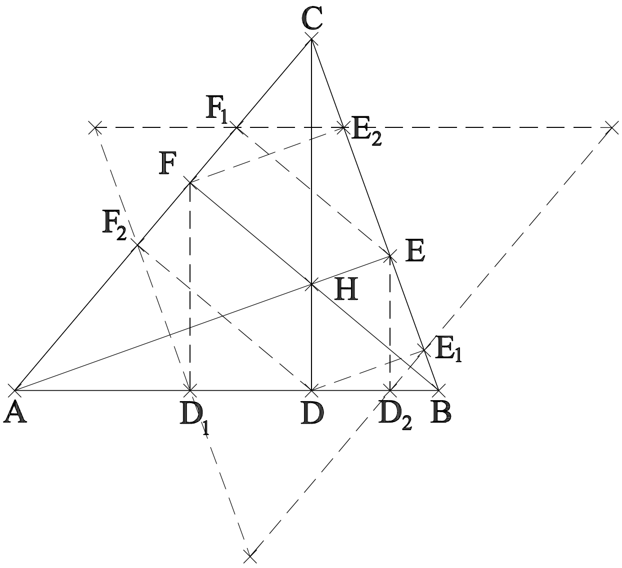
Doch wir wollen uns im folgenden damit beschäftigen, ob die sechs zusätzlichen Fußpunkte der Nebenhöhen tatsächlich auf einem Kreis liegen, so wie es in der nebenstehenden Skizze aussieht.



Henry Martin **Taylor** (1842 - 1927) hat im Jahre 1882 diese Kreiseigenschaft publiziert, doch schon 3 Jahre früher hat dies der belgische Mathematiker Eugène Charles **Catalan** (✳ 30. Mai 1814 in Brügge; † 14. Februar 1894 in Liège) erwähnt. Doch möglicherweise war auch er nicht der Entdecker, sondern 1877 ein französischer Mathematiker, genannt Eutaris.

Der Kreis durch die sechs Fußpunkte der Nebenhöhen eines Kreises wird heute üblicherweise mit Taylor-Kreis oder Catalan-Kreis bezeichnet. - Doch nun zum Beweis.

Betrachtet man die Figur aus der Sicht des Kreises, so könnte man die Dreiecksseiten mit den Kreisschnittpunkten auch als Abschnitte von Sekanten interpretieren, die, ausgehend von Punkten A, B, C außerhalb des Kreises, diesen schneiden. - Da gab es doch den Sekantensatz!? - Außerdem fällt auf, dass in der Figur viele Paare ähnlicher Dreiecke zu finden sind.
Moment einmal - ist der Sekantensatz eigentlich umkehrbar?



Dreieck und Nebenhöhen

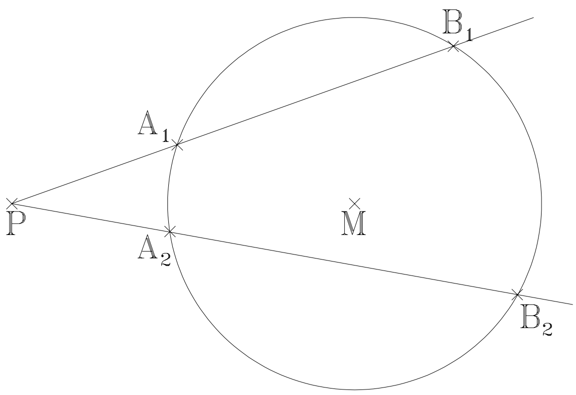
oder: ... Aus 3 mach 9, was folgt daraus.

2) <u>Beweise:</u>

$$\overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1} = \overline{PA_2} \cdot \overline{PB_2} \quad \Rightarrow$$

A_1, A_2, B_2, B_1 liegen auf einem Kreis.

<u>Tipp:</u> „Widerspruchsbeweis“ - Angenommen B_1 liegt nicht auf dem Kreis k um die 3 Punkte A_1, A_2, B_2. Dann schneidet $g(P,A_1)$ den Kreis k in einem Punkt B_1^* und $B_1^* \neq B_1$. - Nun gilt nach Sekantensatz .....



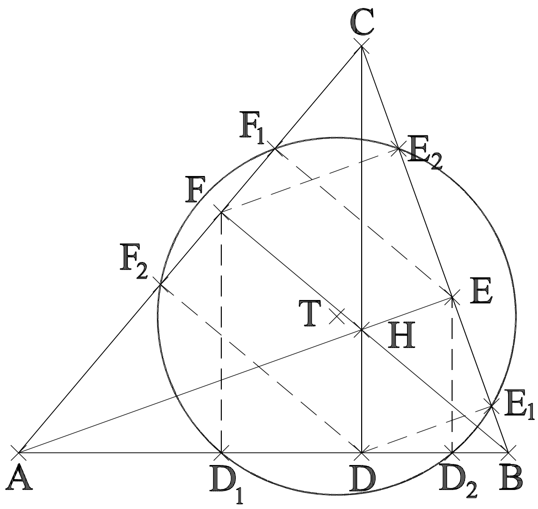
Von der Vielzahl der Möglichkeiten, Paare ähnlicher Dreiecke zu finden, betrachten wir zunächst solche mit dem Eckpunkt A.

3) Begründe, dass die folgenden Dreiecke ähnlich sind:[1]

$$\Delta ADF_2 \cong \Delta AD_1F$$

$$\Delta AEF_1 \cong \Delta AHF$$

$$\Delta AED_2 \cong \Delta AHD$$



Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ergibt sich:

$$\frac{\overline{AF_2}}{\overline{AD_1}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} \quad \wedge \quad \frac{\overline{AF_1}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} \quad \wedge \quad \frac{\overline{AD_2}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} \; .$$

Zeige durch Kombination der Verhältnisgleichungen bzw. Auflösen nach geeigneten Größen und anschließendem Einsetzen, dass sich folgende Gleichung ergibt:

$$\boxed{\overline{AD_1} \cdot \overline{AD_2} = \overline{AF_1} \cdot \overline{AF_2}}$$

Damit liegen, nach dem Kehrsatz des Sekantensatzes, die Punkte D_1, D_2, F_1, F_2 auf einem Kreis k_A.

---

4) <u>Hausaufgabe:</u> Zeige entsprechend dem Vorgehen bei Aufgabe 3, durch Betrachtung geeigneter Paare ähnlicher Dreiecke, dass die Punkte E_1, E_2, D_1, D_2 auf einem Kreis k_B liegen (Eckpunkt B).

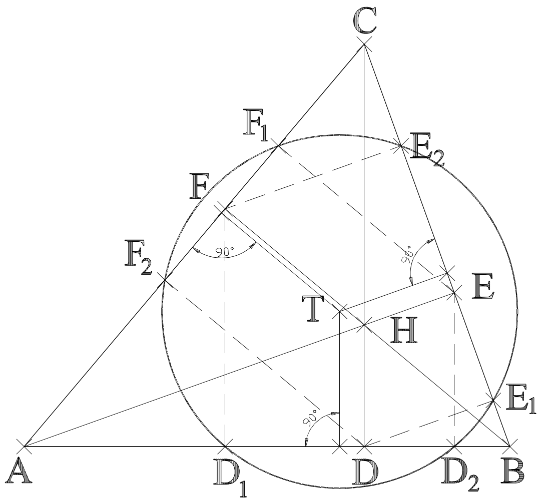
---

[1] <u>Quelle:</u> http://www.cut-the-knot.org/triangle/Taylor.shtml (Alexander Bogomolmy)

Dreieck und Nebenhöhen

oder: ... Aus 3 mach 9, was folgt daraus.

Entsprechend dem Vorgehen bei Aufgabe 3, durch Betrachtung geeigneter Paare ähnlicher Dreiecke (Eckpunkt C), kann man selbstverständlich folgern, dass die Punkte F_1, F_2, E_1, E_2 auf einem Kreis k_C liegen.



Zu zeigen ist nur noch, dass k_A, k_B und k_C identisch sind.

5) <u>Untersuche</u>, was die Annahme, k_A, k_B und k_C wären verschieden, für Konsequenzen im Hinblick auf den Schnitt dieser drei Kreise bzw. das Ausgangsdreieck ΔABC hätte.

   AB läge auf der Geraden durch die Schnittpunkte von k_A und k_B, ..., ein Schnitt von 3 Kreisen ist ein Punkt, ...

   <u>Begründe:</u>
   Den Mittelpunkt T des Taylor-Kreises erhält man als Schnittpunkt von Mittelsenkrechten geeigneter Strecken.