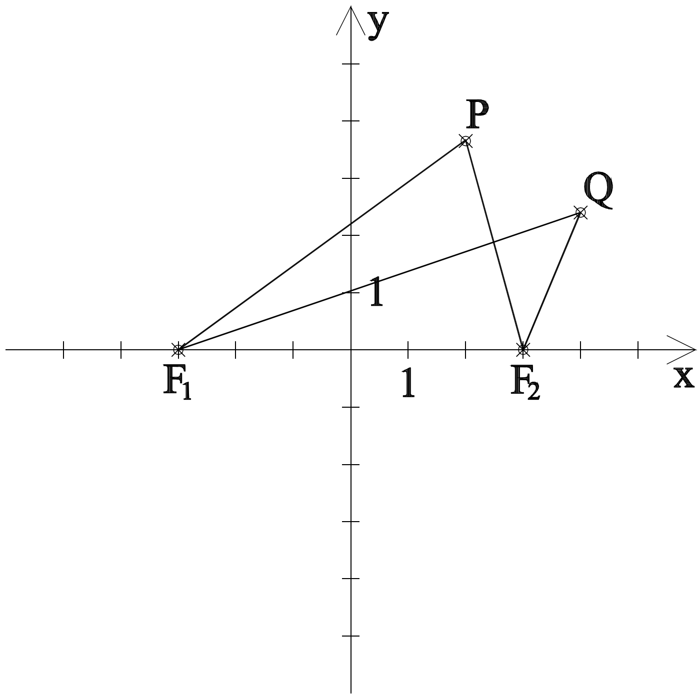
Gleichungen spezieller Kurven

oder ... wie konstruiert ein Gärtner die Form eines schönen Blumenbeetes?

Gegeben seien im kartesischen Koordinatensystem zwei feste Punkte $\mathbf{F_1}$ und $\mathbf{F_2}$, die der Einfachheit halber auf der x-Achse, symmetrisch zur y-Achse liegen sollen.



Wir wollen untersuchen, wo alle Punkte der Ebene liegen, deren Abstandssumme zu den beiden Punkten konstant ist, d.h. es soll gelten:

$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k}$$

1) Zeichne in dein Heft ein kartesisches Koordinatensystem und kennzeichne als Fixpunkte die Punkte (-3 | 0) und (3 | 0).
Es sei k = 10.
Konstruiere nun mit Zirkel und Lineal einige Punkte, welche die obige Bedingung erfüllen.
Gib an, was ist die minimal und was die maximal mögliche Einsetzung für die x-Koordinate solcher Punkte ist.

2) Bestätige, dass für den zuvor in der Graphik skizzierten Punkt **P** mit den Koordinaten $\mathbf{x_P}$ und $\mathbf{y_P}$ gelten muss:

$$\sqrt{(x_P+3)^2 + y_P^2} + \sqrt{(3-x_P)^2 + y_P^2} = 10$$

und für den zuvor in der Graphik skizzierten Punkt **Q** mit den Koordinaten $\mathbf{x_Q}$ und $\mathbf{y_Q}$ muss gelten:

$$\sqrt{(x_Q+3)^2 + y_Q^2} + \sqrt{(x_Q-3)^2 + y_Q^2} = 10.$$

Begründe, dass es für die Gleichung egal ist, ob der Punkt eine kleinere x-Koordinate als die von $\mathbf{F_2}$ aufweist (so wie hier **P**) oder eine größere x-Koordinate als die von $\mathbf{F_2}$ aufweist (so wie hier **Q**).

3) Bestätige durch algebraische Umformung der Gleichung: $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10$, dass alle Punkte, welche die Anfangsbedingung erfüllen, der folgenden Gleichung genügen.

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

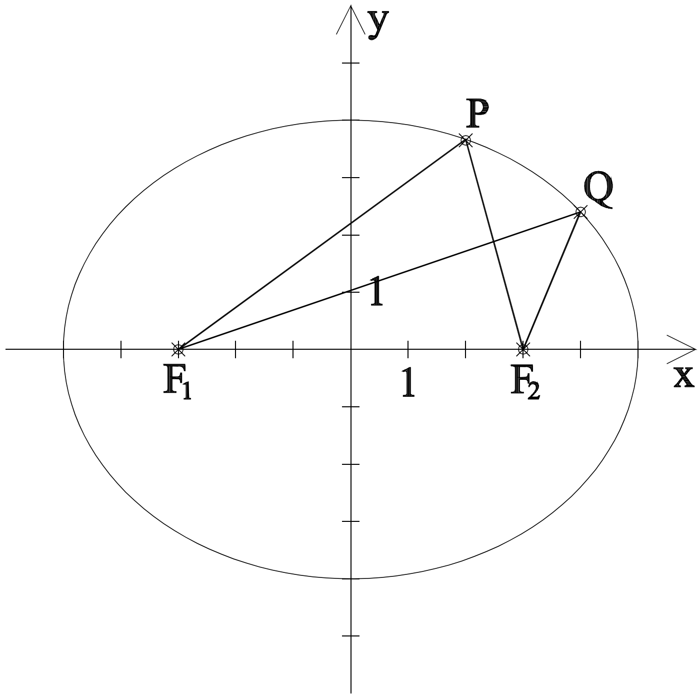
Das hatten wir doch schon einmal bei „Pythagoräischen Zahlentripeln“?!

4) Löse die Gleichung nach y^2 auf und bestätige über $y = \pm\frac{4}{5}\cdot\sqrt{25-x^2}$ die Definitionsmenge und dass die Kurve ein „gestauchter“ Kreis (Ellipse) ist. - Zeichne die Ellipse.

Gleichungen spezieller Kurven

oder ... wie konstruiert ein Gärtner die Form eines schönen Blumenbeetes?

Das Ergebnis unserer Rechnungen - Ein Gärtner muss also nur zwei Pflöcke in den Boden stecken, an diesen eine Schnur befestigen deren Länge größer als der Abstand der Pflöcke ist, und dann bei gespannter Schnur alle Punkte um die Pflöcke herum kennzeichnen! - Fertig!



Doch was ergibt sich, wenn wir bei unserer Anfangsbedingung die Summe durch eine Differenz ersetzen, d.h. wo liegen alle Punkte der Ebene, deren Abstandsdifferenz zu den beiden Punkten konstant ist, d.h. es soll gelten:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = k \\ \vee & \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = k \end{array}}$$

5) Zeichne in dein Heft ein kartesisches Koordinatensystem und kennzeichne als Fixpunkte die Punkte (-3 | 0) und (3 | 0). Es sei k = 4. Konstruiere nun mit Zirkel und Lineal einige Punkte, welche die obige Bedingung erfüllen. - Gib an, für welche x-Koordinaten von Punkten die Erfüllung der obigen Differenzbedingungen nicht möglich ist.

....

6) Bestätige durch algebraische Umformung der Gleichung: $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 4$, dass alle Punkte, welche die erste Differenzbedingung erfüllen, der folgenden Gleichung genügen.

$$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1}$$

Erläutere, dass die zweite Differenzbedingung zu derselben Gleichung führt.

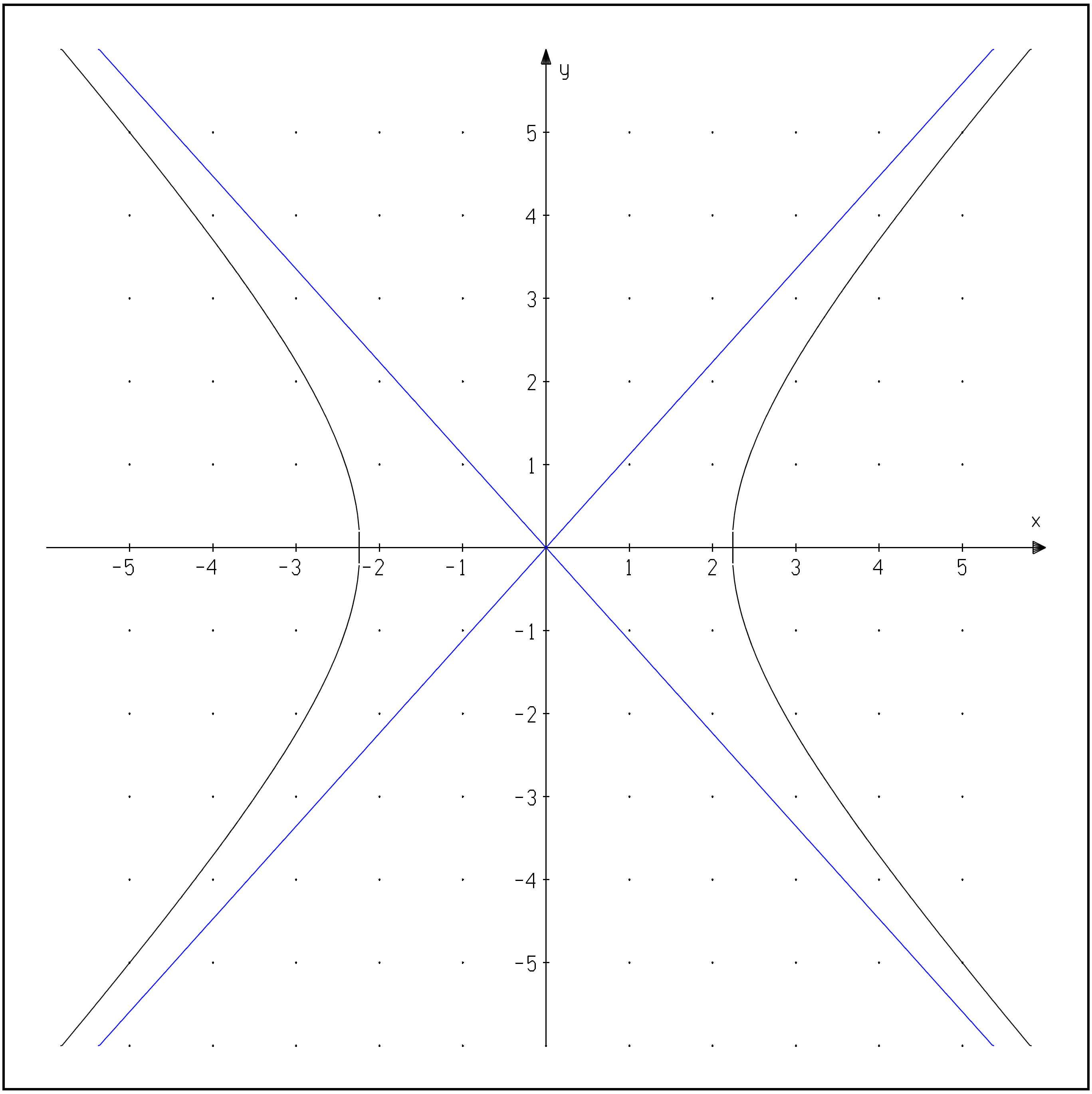
7) Löse die Gleichung nach y^2 auf und bestätige über $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 5}$ die Definitionsmenge aus Aufgabe 5. Untersuche die Werte für betragsmäßig immer größere Einsetzungen für x. Zeichne die Kurve.

<u>Nachtrag für Interessierte:</u> Jean Dominique **Cassini** (1625 - 1712) hat untersucht, wo alle Punkte der Ebene liegen, deren Abstandsprodukt zu zwei festen Punkten konstant ist, d.h. es soll gelten:

$$\boxed{\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = k}$$

Solche Kurven heißen Cassinische Kurven. Die Untersuchung dieser Kurven bleibt der Klassenstufe 11 vorbehalten.

Die zeichnerische Lösung von Aufgabe 7:



Mit eingezeichnet sind die zwei Geraden (Asymptoten) mit den Gleichungen:

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x \quad \text{und} \quad y = -\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x$$