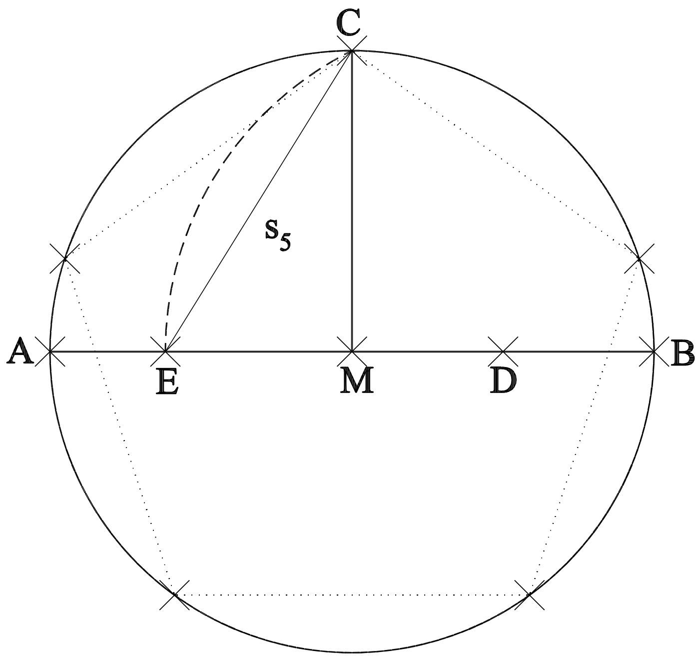
Von Sehnen und Sehnenlängen

Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) und Rechnung

Die regelmäßige 5-Ecks - Konstruktion des Klaudios **Ptolemaios** (gelebt ca. 100 bis ca. 160 n. Chr. in Alexandria)[1]:

– Gegeben ein Kreis mit Durchmesser AB.
– D ist der Mittelpunkt der Strecke MB.
– C ist Kreispunkt mit CM ⊥ AB.
– E ist der Schnittpunkt der Strecke AM mit einem Kreisbogen um D, mit Radius $\overline{DC}$.



Behauptung:

Die Sehne $\mathbf{s_5}$ des regelmäßigen 5-Ecks hat die Länge der Strecke EC.

Aufgaben:

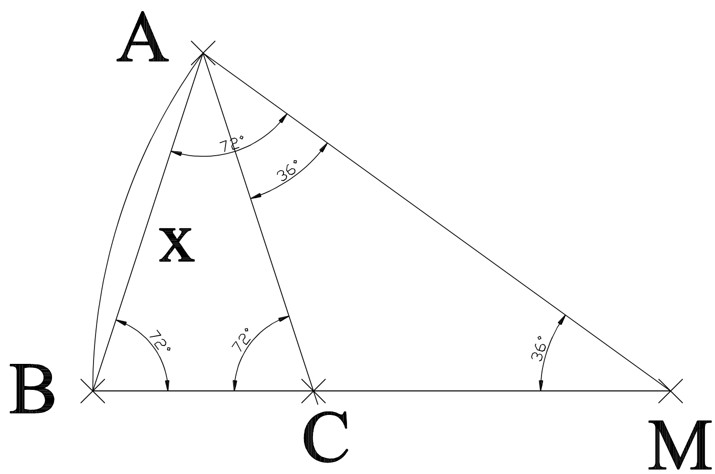
1) Überprüfe die Konstruktion eines regelmäßigen 5-Ecks gemäß der obigen Anleitung. Wie groß ist ein Innenwinkel bei einem regelmäßigen 5-Eck?

2) Der Radius des umbeschriebenen Kreises sei **r** = 1. Bestätige, dass für die Länge der Strecke EC gilt: $\overline{EC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{10 - 2\cdot\sqrt{5}}$.

Ist denn die Konstruktion des Ptolemaios wirklich richtig? - Kann man beweisen, dass $\mathbf{s_5}$ genauso lang wie EC sein muss?

Wir wollen es versuchen! - Durch Verdoppelung der Eckenanzahl kommt man ja bekanntlich von der Sehnenlänge $s_3 \rightarrow s_6 \rightarrow s_{12} \rightarrow s_{24} \rightarrow \ldots$, von der Sehnenlänge $s_4 \rightarrow s_8 \rightarrow s_{16} \rightarrow s_{32} \rightarrow \ldots$. Zur Bestimmung von $\mathbf{s_5}$ gehen wir umgekehrt vor und schließen von $\mathbf{s_{10}}$ rückwärts.

Nebenstehend ist ein Segment eines regelmäßigen 10-Ecks gezeichnet, wobei die Sehne $\mathbf{s_{10}}$ der Einfachheit halber mit **x** bezeichnet wurde. Vom Anfangspunkt A der Sehne wurde die Winkelhalbierende konstruiert, die den Kreisradius BM im Punkt C schneidet.



3) Begründe, dass gilt:

a) $x = \overline{AC} = \overline{CM}$
b) $\Delta BCA \simeq \Delta ABM$

---

[1] Quelle: C.J .Scriba / P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie (Springer-Verlag)

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔBCA und ΔABM gilt (r=1):

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

4) Beweise, dass gilt (r=1): $s_{10} = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{5} - 1\right) = \frac{1}{\Phi}$

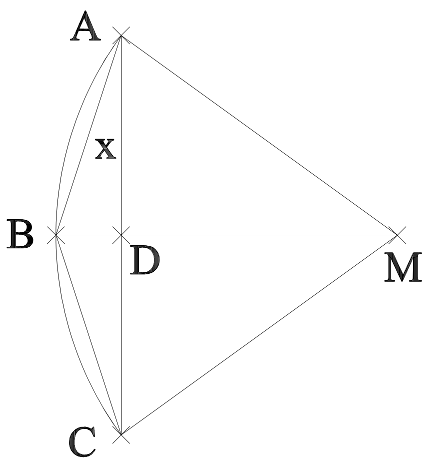
---

5) Es gilt: $s_{10}^2 = \overline{BD}^2 + \left(\frac{s_5}{2}\right)^2$

und $1 = \overline{DM}^2 + \left(\frac{s_5}{2}\right)^2$

und $\overline{BD} = 1 - \overline{DM}$.

Bestätige durch Berechnung von s_5 aus den 3 Beziehungen (und der bekannten Größe s_{10}) dass die Konstruktion des Ptolemaios richtig ist (siehe Teil 2).



6) Beweise: Die Länge der Strecke EM in der Konstruktion des Ptolemaios entspricht der Sehnenlänge $\mathbf{s_{10}}$ eines einbeschriebenen Zehnecks am Einheitskreis! (Wie überraschend!)[2]

Nun haben Sehnen am Kreis, bzw Halbsehnen, sehr viel mit trigonometrischen Funktionen zu tun. Schon Ptolemaios hat eine Sehnentafel angefertigt, die in seinem astronomischen Hauptwerk "Matematikē syntaxis" enthalten ist. Dieses bis zu Copernicus maßgebliche astronomische Lehrbuch wurde später auch "Megalē syntaxis" (die mathematische bzw. große Sammlung) genannt. Bekannter ist es unter dem arabischen Titel "Almagest".

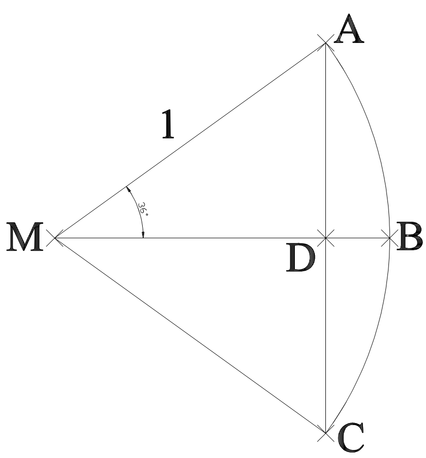
Ptolemaios bemühte sich, Sehnenlängen für immer kleinere Kreisbögen anzugeben. In unserer heutigen Sprechweise heißt das, Funktionswerte der Sinusfunktion exakt für immer kleinere Winkel zu berechnen.

7) Gib einen exakten Wert für sin(36°), cos(36°) und tan(36°) an.

8) Bestimme mit Hilfe von Additionstheoremen:
sin(6°) = sin(36°-30°); cos(6°) = cos(36°-30°); vergleiche mit den Näherungswerten deines Taschenrechners.

9) Verwende die Beziehung:
$\cos(6°) = \cos(2\cdot3°) = (\cos(3°))^2 - (\sin(3°))^2$, und das vorherige Ergebnis, um sin(3°) und cos(3°) zu bestimmen.
Setze das Verfahren fort und berechne: sin(1,5°) und cos(1,5°).

10) Zur Bestimmung von sin(1°) hat Ptolemaios linear interpoliert, d.h. $\sin(1°) \approx \frac{2}{3}\cdot\sin(1{,}5°)$.
Vergleiche dieses Ergebnis mit dem Näherungswert deines Taschenrechners.



---

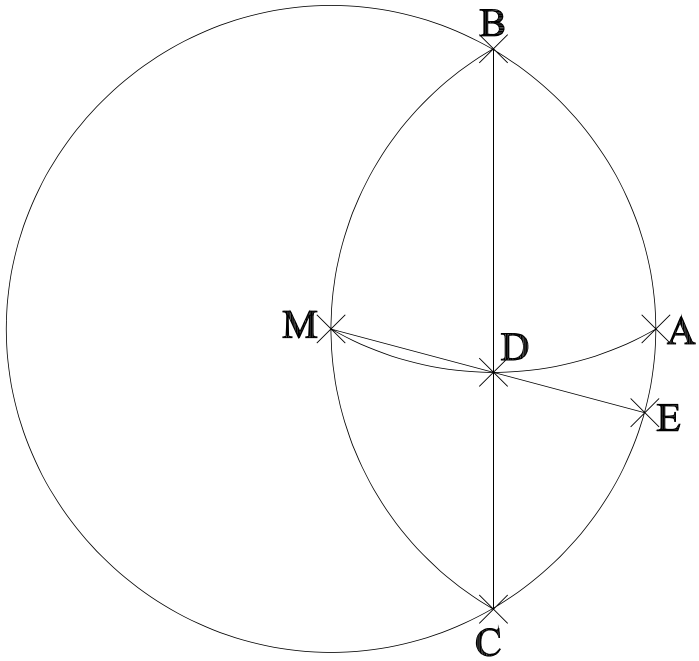
[2] Anmerkung: Das (rechtwinklige) Dreieck ΔEMC in der Konstruktion des Ptolemaios besteht aus den Sehnen s_5, s_6 und s_{10} regelmäßiger n-Ecke.

Von Sehnen und Sehnenlängen

Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) und Rechnung

Eine "letzte" historische Reminiszenz:

Bei **Leonardo da Vinci** (1452 - 1519) findet sich die nebenstehende Figur:



In einem beliebigen Punkt A eines Kreises um M wird mit dem Radius ein Bogen BMC geschlagen, und mit dem gleichen Radius um B ein Bogen MDA.
Der Bogen MDA schneidet die Strecke BC im Punkt D.
Die Verlängerung der Strecke MD schneidet den Kreis im Punkt E.

Leonardo da Vinci behauptet:

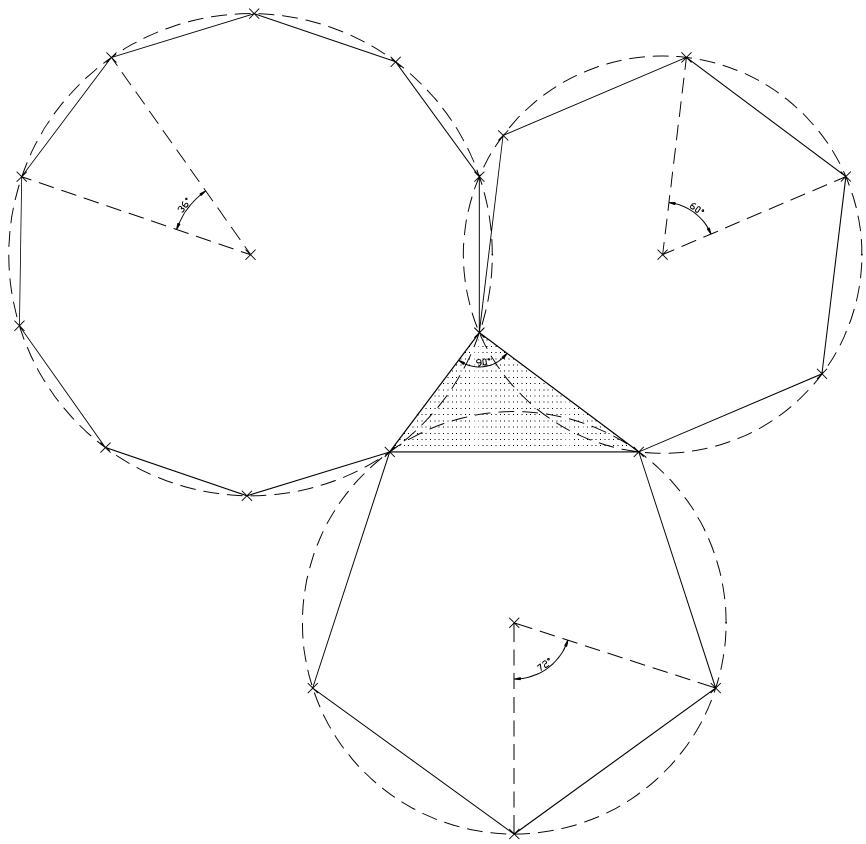
In der Figur treten die zum regelmäßigen **3-**Eck, **6-**Eck, **8-**Eck, **12-**Eck, **24-**Eck gehörigen Kreisbögen auf !

Hat er Recht? - Kannst du es begründen?

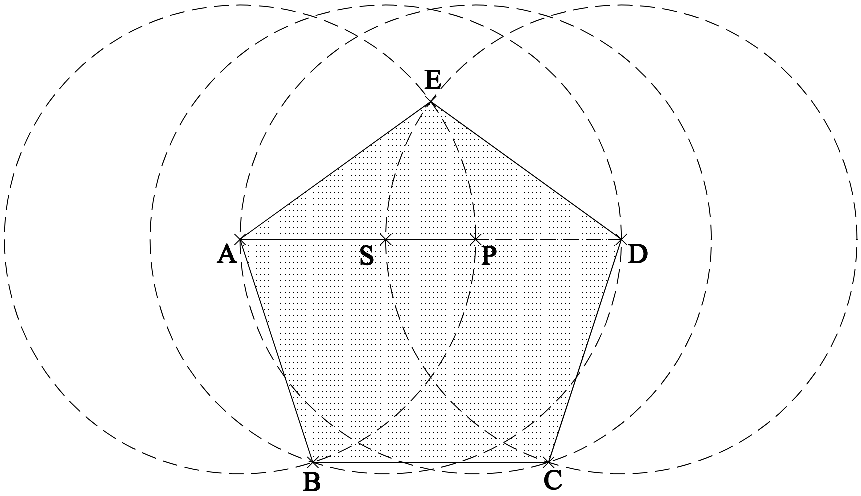
Übrigens, - was weißt du über **Leonardo da Vinci**, sicher unbestritten ein "Riese" in der Kulturgeschichte der Menschheit? - Versuche unbedingt noch mehr über ihn zu erfahren!

---

11) Bestätige die Beziehung, die in der nebenstehenden Graphik erkennbar ist.



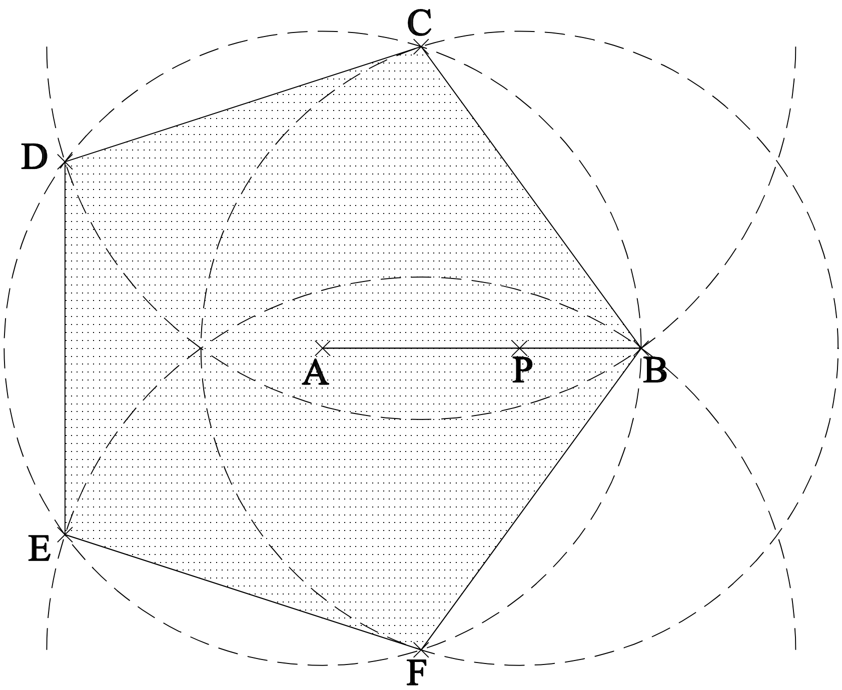
Man kann ein regelmäßiges Fünfeck auch, ausgehend von einer vorgegebenen Seitenlänge $s_5 := \overline{AP}$, konstruieren, indem man die Strecke AP durch einen Punkt S im Verhältnis des goldenen Schnitts teilt und entsprechend der nebenstehenden Graphik vier kongruente Kreise mit den Mittelpunkten A, S, P und D zeichnet.[3]
Es gilt: $D \in g(A,P) \wedge \overline{SD} := \overline{AP}$.
(Erinnerung: "Das Pentagramm" - Klassenstufe 9)



12) Fertige zunächst eine eigenständige Konstruktion an und beweise danach:
Das Polygon ABCDE ist ein regelmäßiges Fünfeck.

Auch in dieser Konstruktion wurde die Strecke AB im Verhältnis des goldenen Schnitts durch einen Punkt P geteilt.

Wiederum durch vier Kreise mit den Mittelpunkten A, P, C und F, wobei hier nur jeweils zwei Kreise kongruent sind, kann ein regelmäßiges Fünfeck BCDEF erzeugt werden.[4]



13) Analysiere die nebenstehende Figur, fertige eine eigenständige Konstruktion an und beweise danach:
Das Polygon BCDEF ist ein regelmäßiges Fünfeck.

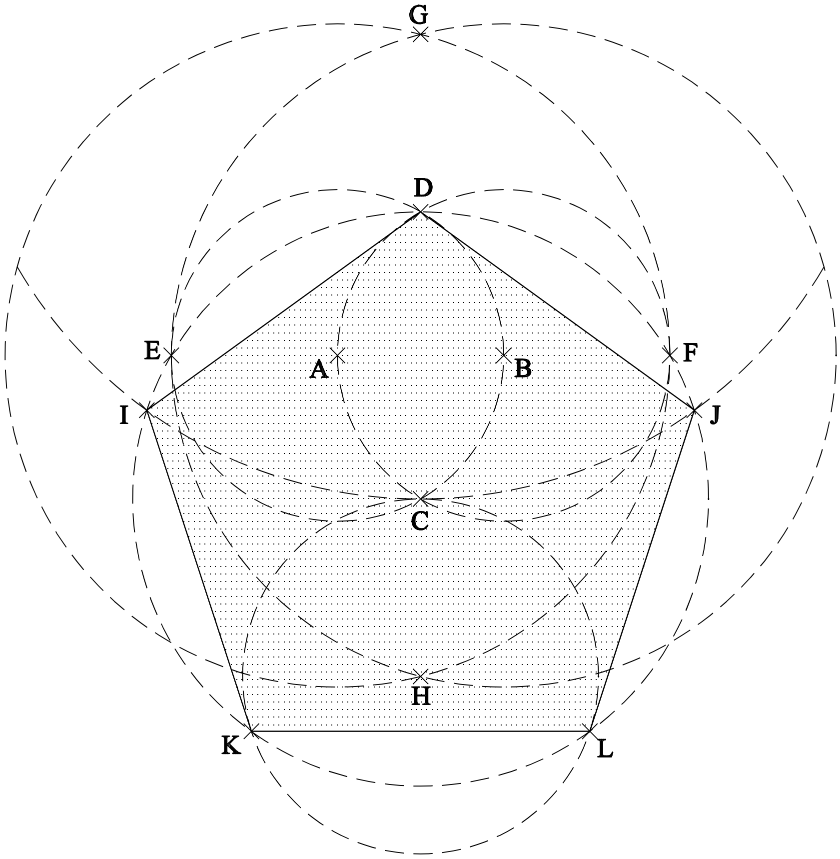
Tipp: Begründe zunächst, dass das Dreieck ΔAPC gleichschenklig ist und bestimme das Maß des Winkels $\sphericalangle BAC$.

[3] Quelle: Kurt Hofstetter: A Simple Ruler .... ; Forum Geometricorum Volume 8 (2008)

[4] Quelle: Michael Bataille: Another Compass-Only Construction .... ; Forum Geometricorum Volume 8 (2008)

Ausgehend von zwei Punkten A und B entsteht durch einfache Konstruktion von sieben Kreisen wiederum ein regelmäßiges Fünfeck DIKLJ.[5]

14) Analysiere die nebenstehende Figur und fertige eine eigenständige Konstruktion an.



[5] Quelle: Kurt Hofstetter: A Simple Compass-Only Construction .... ; Forum Geometricorum Volume 8 (2008)