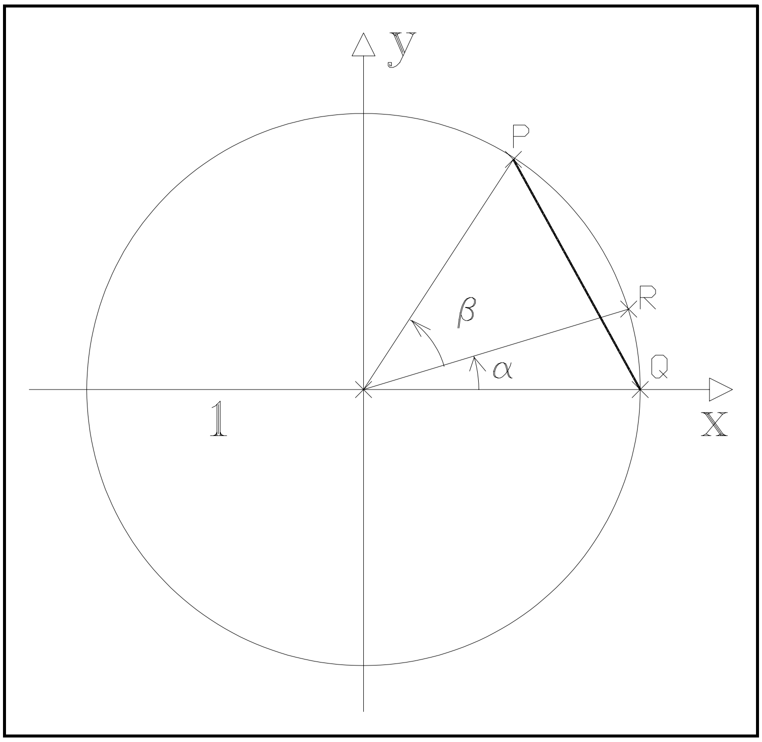
Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

Die Punkte: P, Q, R sind Punkte eines Ursprungskreises mit Radius r=1.

Trage die entsprechenden Punktkoordinaten in Abhängigkeit von α und ß ein!

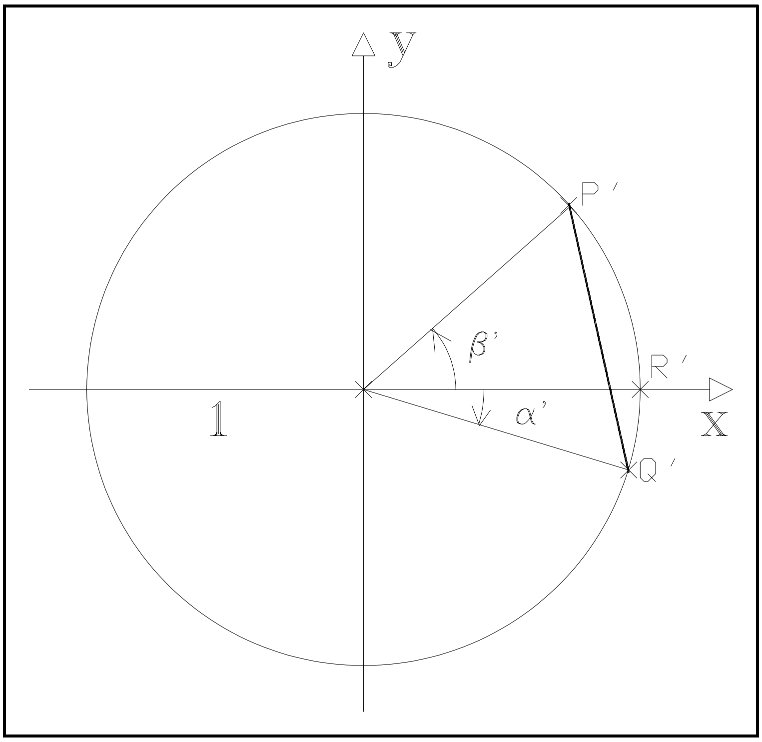
Bestätige, daß für die Länge der Strecke PQ die darunter stehende Beziehung richtig ist.



$$\overline{PQ}^2 = [1 - \cos(\alpha + \beta)]^2 + [\sin(\alpha + \beta)]^2$$

Die Strecke PQ wurde um den Ursprung mit dem Winkel α im mathematisch negativen Sinn gedreht.

Bestätige wiederum die Richtigkeit der angegebenen Beziehung für die Länge der Strecke P'Q'.



$$\overline{P'Q'}^2 = [\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [\sin(\alpha) + \sin(\beta)]^2$$

Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen (Beweise)

$$\overline{PQ}^2 = \left(1 - \cos(\alpha+\beta)\right)^2 + \left(\sin(\alpha+\beta)\right)^2 = \left(\cos(\alpha) - \cos(\beta)\right)^2 + \left(\sin(\alpha) + \sin(\beta)\right)^2 = \overline{P'Q'}^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cdot\cos(\alpha+\beta) + \left(\cos(\alpha+\beta)\right)^2 + \left(\sin(\alpha+\beta)\right)^2 = \left(\cos(\alpha)\right)^2 + \left(\cos(\beta)\right)^2 + \left(\sin(\alpha)\right)^2 + \left(\sin(\beta)\right)^2 - 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\cdot\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cdot\left[\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\right]$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(\sin(\alpha+\beta)\right)^2 = 1 - \left(\cos(\alpha+\beta)\right)^2 = 1 - \left(\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\right)^2$$

$$= 1 - \left[\left(\cos(\alpha)\right)^2\cdot\left(\cos(\beta)\right)^2 + \left(\sin(\alpha)\right)^2\cdot\left(\sin(\beta)\right)^2 - 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\right]$$

$$= \left(\cos(\alpha)\right)^2 + \left(\sin(\alpha)\right)^2 - \left(\cos(\alpha)\right)^2\cdot\left(\cos(\beta)\right)^2 - \left(\sin(\alpha)\right)^2\cdot\left(\sin(\beta)\right)^2 + 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$= \left(\cos(\alpha)\right)^2\cdot\left[1 - \left(\cos(\beta)\right)^2\right] + \left(\sin(\alpha)\right)^2\cdot\left[1 - \left(\sin(\beta)\right)^2\right] + 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$= \left(\cos(\alpha)\right)^2\cdot\left(\sin(\beta)\right)^2 + \left(\sin(\alpha)\right)^2\cdot\left(\cos(\beta)\right)^2 + 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$= \left(\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

<u>Mehrfach wurde verwendet:</u> $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \left(\sin(x)\right)^2 + \left(\cos(x)\right)^2 = 1$; $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \sin(-x) = -\sin(x)$; $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \cos(-x) = \cos(x)$

Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen
Folgerungen und Aufgaben

1) Bestimme unter Verwendung der Additionstheoreme der Sinus- und Kosinusfunktion die exakten Funktionswerte: sin(75°) und cos(75°). - Bestimme weitere Stellen, an denen diese Funktionen betragsmäßig dieselben Funktionswerte annehmen.

2) Überprüfe die Ergebnisse von 1) durch Anwendung des „Pythagoras der Trigonometrie“.

3) Setze im Additionstheorem der Kosinusfunktion: $\alpha = \beta$ und leite unter Verwendung des „Pythagoras der Trigonometrie“ zwei Beziehungen her die es gestatten, die Funktionswerte $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ aus dem Funktionswert $\cos(2\cdot\alpha)$ zu bestimmen.

4) a) Setze in den Beziehungen von 3): $2\cdot\alpha = 75°$ und bestimme danach die exakten Funktionswerte sin(37,5°) und cos(37,5°).

   b) Setze in den Beziehungen von 3): $2\cdot\alpha = 15°$ und bestimme danach die exakten Funktionswerte sin(7,5°) und cos(7,5°).

   c) Überprüfe die Güte deines Taschenrechners durch Anwendung der Umkehrfunktion auf die Ergebnisse von a) und b).

   d) (Für Mutige) Setze das Verfahren aus a) fort und bestimme die exakten Funktionswerte der Sinus- und Kosinusfunktion: sin(18,75°) und cos(18,75°).

5) Bekanntlich gilt: $\tan(\alpha) := \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

   a) Leite Additionstheoreme für die Tangensfunktion her. Anleitung: Den sich ergebenden Bruch mit $\dfrac{1}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}$ erweitern.

   b) Bestimme exakt: tan(75°) und tan(15°).

   c) Beweise: Für die Steigung m einer Geraden gilt: $m = \tan(\alpha)$. - Erläutere, wie man mit Additionstheoremen der Tangensfunktion die Größe des Schnittwinkels zweier Geraden bestimmen kann. - Führe die Rechnung an einem selbst gewählten Beispiel durch und kontrolliere das Ergebnis durch Konstruktion und nachfolgende Winkelmessung.[1]

6) Entwickle eine Beziehung für $\tan(2\cdot\alpha)$.

---

[1] Aufgabenteil nicht einfach! - Wer das schafft ist mathematisch: super!

Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen
Folgerungen und Aufgaben

<u>zusätzliche Übung:</u>

Es gilt: $\overline{OC} = 1$;

zeige:

$\overline{DC} = \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$,

$\overline{DE} = \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$,

$\overline{FE} = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)$,

$\overline{OF} = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)$.