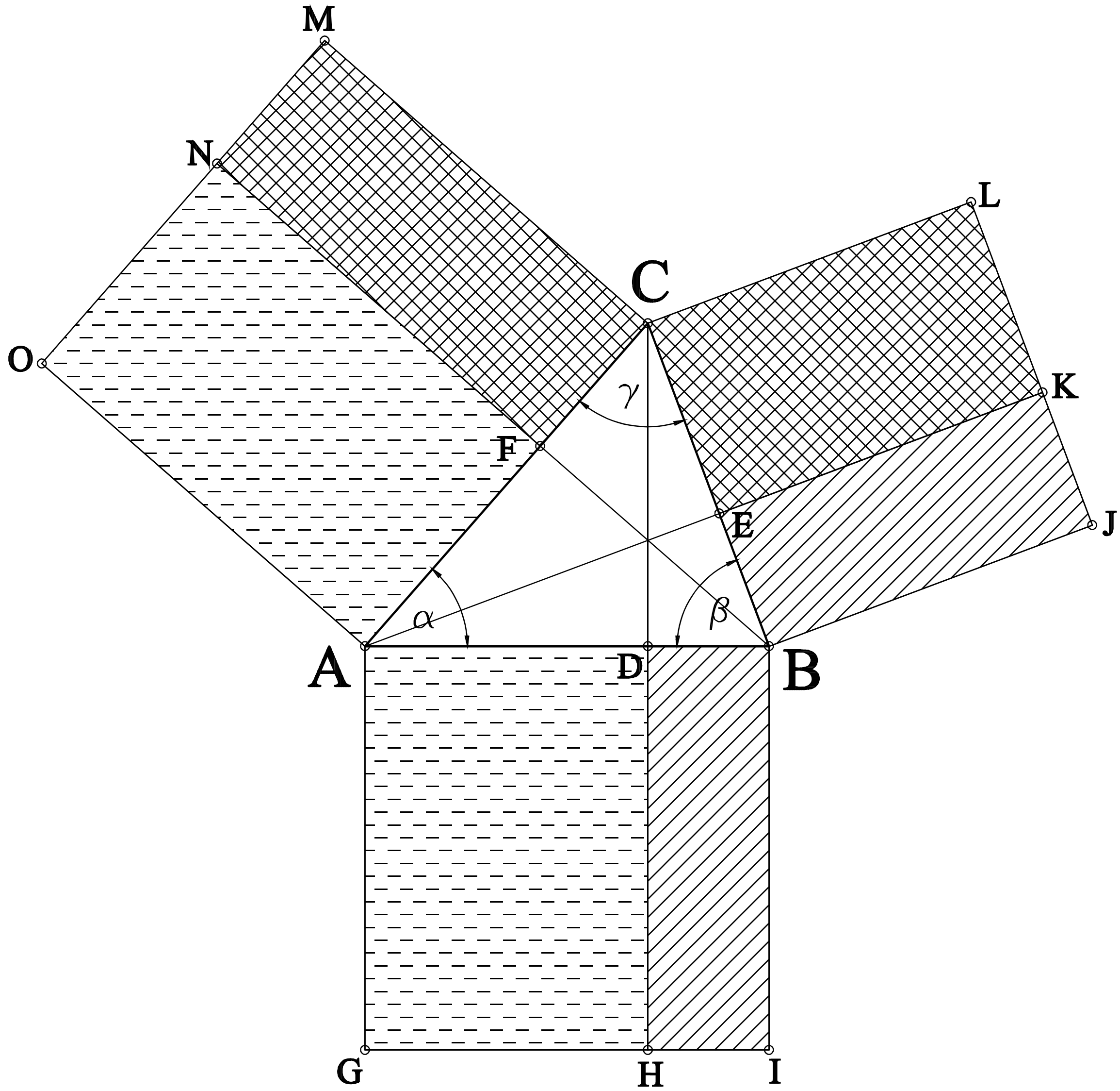
Der verallgemeinerte Satz des Pythagoras
(Kosinussatz)

Der spitzwinklige Fall:



Im obigen (nicht-rechtwinkligen) Dreieck sind die Lote von den Eckpunkten auf die jeweiligen gegenüberliegen Seiten eingezeichnet, sowie die Quadrate über den 3 Seiten skizziert. Die Verlängerungen der Lote über die Fußpunkte hinaus teilen die Quadrate in jeweils 2 Rechtecke.

Aufgabe: Beweise unter Verwendung der Projektionseigenschaft trigonometrischer Funktionen, dass die Flächeninhalte der folgenden Paare von Vierecken jeweils gleich groß sind:

a) ☐AGHD - ☐AFNO ; b) ☐DHIB - ☐BJKE ; c) ☐EKLC - ☐CMNF

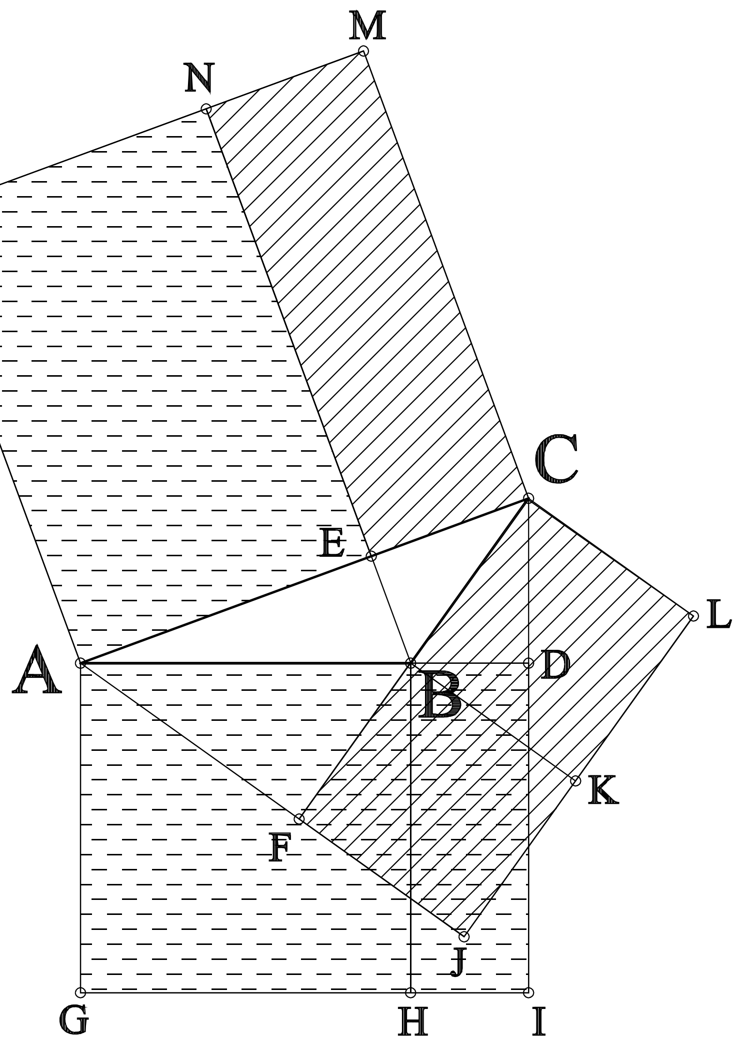
Offensichtlich besteht jeweils ein Quadrat (c^2) aus 2 Rechtecken, die Summe zweier Quadrate ($a^2 + b^2$) aus 4 Rechtecken, von denen 2 so groß sind wie die des einzelnen Quadrates. - Ergänze die folgenden Gleichungen:

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$ **-** …. $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$ **-** …. $\mathbf{b^2 = c^2 + a^2}$ **-** ….

....

Der verallgemeinerte Satz des Pythagoras
(Kosinussatz)

Der stumpfwinklige Fall:



Aufgabe: Trage in die obige Skizze die Winkel α, β und γ ein, sowie die 2 Winkel β_1 und β_2 am Punkt B, die Nebenwinkel zu β sind.
Beweise unter Verwendung der Projektionseigenschaft trigonometrischer Funktionen, dass die Flächeninhalte der folgenden Paare von Vierecken jeweils gleich groß sind:

a) ☐AGID - ☐AENO ; b) ☐FJLC - ☐ECMN

Damit gilt offensichtlich: **$b^2 = c^2 + a^2$ + A(☐HIDB) + A(☐FJKB)**!

Bestimme unter Verwendung der Projektionseigenschaften trigonometrischer Funktionen und der Winkel β_1 und β_2 die Flächeninhalte der letzten beiden Rechtecke. Benutze am Schluß die bekannte Beziehung der Kosinusfunktion: cos(β) = - cos(180° - β) (Beweis?!) und bestätige damit, dass der Kosinussatz auch im stumpfwinkligen Fall gilt.[1]

---

[1] o.B.d.A wurde hier natürlich nur einer der 3 Fälle betrachtet.