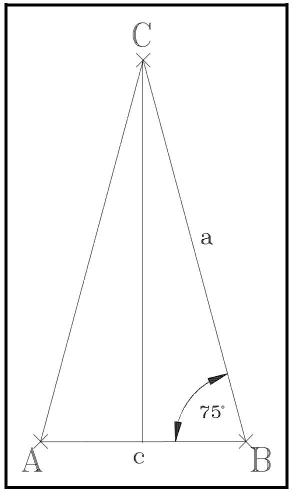
Übung: Dreiecksmessung
(Auch komplizierte Wege führen zum Ziel)

Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Umfang U = 30 und Basiswinkeln mit der Größe 75°. - Bestimme die Längen a und c !



<u>Lösung:</u> Folgende Gleichungen wurden von den Schülern gefunden:

(1) $30 = 2 \cdot a + c$ (2) $\cos(75°) = \dfrac{\frac{c}{2}}{a}$; (3) $\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$ (4) $\sin(75°) = \dfrac{h}{a}$

<u>Schülervorschlag:</u> Aus Gleichung (1) erhält man $c = 30 - 2 \cdot a$ und somit $\dfrac{c}{2} = 15 - a$.

Aus Gleichung (4) erhält man $h = a \cdot \sin(75°)$.

h und c werden in Gleichung (3) eingesetzt, wodurch man eine Gleichung erhält, in der nur noch a als Variable vorkommt: $(a \cdot \sin(75°))^2 + (15 - a)^2 = a^2$

Wendet man die binomische Formel an, erhält man eine (aus der Sicht der Schüler absolut häßliche) gemischtquadratische Gleichung zur Bestimmung von a: $a^2 \cdot (\sin(75°))^2 - 30 \cdot a + 225 = 0$.

Nach einiger Rechenarbeit erhält man als einzige Lösung: [1]

$$a = \frac{15}{(\sin(75°))^2} - \sqrt{\frac{225 - 225\,(\sin(75°))^2}{(\sin(75°))^4}} = \frac{15}{(\sin(75°))^2} - \frac{15}{(\sin(75°))^2} \cdot \sqrt{1 - (\sin(75°))^2} = \frac{15}{(\sin(75°))^2} \cdot (1 - \cos(75°))$$

$$= \frac{15}{1 - (\cos(75°))^2} \cdot (1 - \cos(75°)) = \frac{15 \cdot (1 - \cos(75°))}{(1 + \cos(75°)) \cdot (1 - \cos(75°))} = \frac{15}{1 + \cos(75°)} .$$

---

[1] Die Lösung: $a = \dfrac{15}{1 + \cos(75°)}$ erhält man aber auch unmittelbar aus $30 = 2a + c$ (1) und $\cos(75°) = \dfrac{\frac{c}{2}}{a}$ (2), wenn man $c = 30 - 2a$ in (2) einsetzt und nach a auflöst.

Die vollständige Rechnung

$$a^2 \cdot (\sin (75°))^2 - 30 \cdot a + 225 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{15}{(\sin (75°))^2} \pm \sqrt{\frac{225}{(\sin (75°))^4} - \frac{225}{(\sin (75°))^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{15}{(\sin (75°))^2} \pm \sqrt{\frac{225 - 225 (\sin (75°))^2}{(\sin (75°))^4}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{15}{(\sin (75°))^2} \pm \sqrt{\frac{225}{(\sin (75°))^4} \cdot (1 - (\sin (75°))^2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{15}{(\sin (75°))^2} \pm \frac{15}{(\sin (75°))^2} \cdot \sqrt{1 - (\sin (75°))^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{15}{(\sin (75°))^2} \pm \frac{15}{(\sin (75°))^2} \cdot \sqrt{(\cos (75°))^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{15}{(\sin (75°))^2} \pm \frac{15}{(\sin (75°))^2} \cdot \cos (75°)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{15}{1 - (\cos (75°))^2} \pm \frac{15}{1 - (\cos (75°))^2} \cdot \cos (75°)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{15}{1 - (\cos (75°))^2} \pm \frac{15}{1 - (\cos (75°))^2} \cdot \cos (75°)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{15}{1 - (\cos (75°))^2} \cdot (1 - \cos (75°))$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{15 \cdot (1 - \cos (75°)}{(1 + \cos (75°)) \cdot (1 - \cos (75°))}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{15}{1 + \cos (75°)} \; .$$

$$\left[\quad a_2 = \frac{15}{1 - \cos (75°)} \quad \text{ist keine brauchbare Lösung.} \quad \right]$$