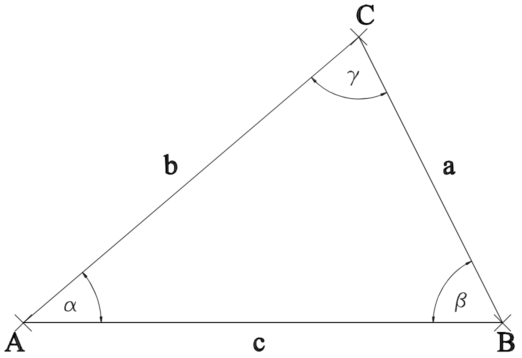
Dreiecksberechnung

Was tun, wenn kein Winkel bekannt ist?

Gegeben sei ein Dreieck durch die Längen seiner drei Seiten (die Dreiecksungleichung soll gelten), womit es nach dem Kongruenzsatz SSS eindeutig bestimmt ist.



Wie berechnet man nun die 3 Winkelgrößen α, β und γ ?

1) Begründe, warum in diesem Fall der Sinussatz nicht weiter hilft, jedoch der Kosinussatz.

Geht es auch anders ?

<u>In Klassenstufe 9 haben wir gelernt:</u>

Mit $s := \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$, der halben Umfangslänge des Dreiecks, gilt für den Flächeninhalt:

$$\boxed{A_\Delta = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}\ .$$

<u>In Klassenstufe 7 haben wir gelernt:</u>

Mit r_i , dem Radius des Innenkreises, gilt außerdem für den Flächeninhalt:

$$\boxed{A_\Delta = s \cdot r_i}$$

---

2) Bestätige:

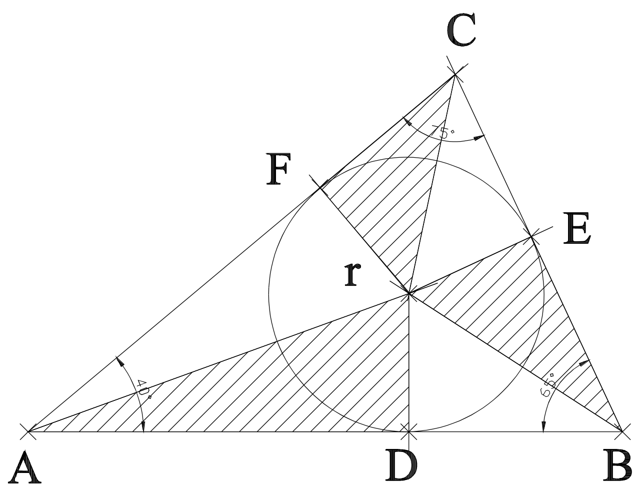
$$\boxed{r_i = \sqrt{\frac{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{s}}}$$

3) Begründe:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r_i}{s-a}$$

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r_i}{s-b}$$

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{r_i}{s-c}$$



4) Gegeben sei ein Dreieck mit: a = 5 cm, b = 6 cm und c = 8 cm.

Berechne die 3 Winkelgrößen α, β und γ !

Der Tangentialsatz

Es geht auch ohne Kosinussatz, denn auch die Tangensfunktion ist nützlich!

Kann man nun die Tangensfunktion, neben dem Sinus- und dem Kosinussatz, auch zu weiteren Dreiecksberechnungen benutzen? - In Formelsammlungen findet man die folgende Beziehung:

$$\boxed{(a+b) : (a-b) = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) : \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Diese Gleichung soll in jedem Dreieck gültig sein. - Aber, - vorausgesetzt, dass sie wirklich richtig ist, wozu benötigt man sie?

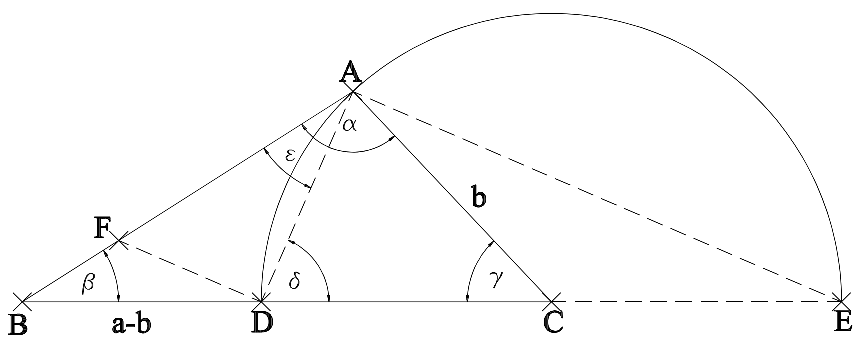
Angenommen, man kennt von einem Dreieck die Größen von: a, b und γ, d.h. 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel, so kann man die restlichen Größen berechnen.[1]

Kennt man γ, so natürlich auch $\alpha+\beta$, also $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Mit dem Tangentialsatz bestimmt man dann $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Dann nur noch einmal $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ addieren, und einmal subtrahieren, dann kennt man alle 3 Winkel. Für die Seitenlänge c nimmt man dann den Sinussatz.

---

5) Zeichne in dein Heft ein Dreieck, wobei BC die längste Seite sein soll, die der Übersichtlichkeit der Skizze wegen als Grundseite gezeichnet werden sollte. Konstruiere nun 2 Punkte D und E mit:

$$D \in g(B,C) \;\wedge\; E \in g(B,C) \;\wedge\; \overline{DC} = \overline{CE} = \overline{AC}$$



Konstruiere eine Parallele zu AE durch den Punkt E. Nenne den Schnittpunkt dieser Parallelen mit BA Punkt F.

<u>Beweise:</u> $\overline{\delta} := \overline{\sphericalangle CDA} = \frac{1}{2}\cdot\overline{\sphericalangle ECA} = \frac{\alpha+\beta}{2} \;\wedge\; \overline{\varepsilon} := \overline{\sphericalangle BAD} = \frac{\alpha-\beta}{2}$

6) <u>Begründe:</u>

$$\frac{(a+b)}{(a-b)} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DA}}\cdot\frac{\overline{DA}}{\overline{FD}} = \frac{\;\frac{\overline{AE}}{\overline{DA}}\;}{\;\frac{\overline{FD}}{\overline{DA}}\;} = \frac{\tan(\delta)}{\tan(\varepsilon)}$$

<u>Hausaufgabe:</u> Führe einen entsprechenden Beweis durch für den Fall durch, dass die Strecke BC kürzer als die Strecke AC ist. (<u>Hinweis:</u> Wähle nun AC als Grundseite und trage die wiederum die kürzere Seite auf der längeren Seite geeignet ab (und füge sie an)).

---

[1] Das ist der typische Fall für den Kosinussatz, aber - wenn man ihn noch nicht kennt (oder vergessen hat) ?!

7) Von einem Dreieck sei bekannt:

$a = 9$ cm, $b = 5$ cm, $\overline{\gamma} = 55°$

a) Bestimme die fehlenden Größen des Dreieckes mit Hilfe des Tangentialsatzes.
b) Bestimme die fehlenden Größen des Dreieckes mit Hilfe des Kosinussatzes.
c) Vergleiche den Rechenaufwand der beiden Strategien.